

**Ә.Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д.Ә. ШЫНЫБЕКОВ,
А.И. БЕКТАСОВА**

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің
7-сыныбына арналған оқулық



Қазақстан Республикасының Оқу-ағарту министрлігі
ұсынған



Алматы «Атамұра» 2025

1-8989

ӘОЖ 373. 167.1

КБЖ 22. 15я72

ІІ 97

Жалпы редакциясын басқарған физика-математика
ғылымдарының докторы, профессор,
ҚР ҰҒА академигі **М. Өтелбаев**

Пайдаланылған шартты белгілер:



– Жаңа материалды бекіту
сұрақтары



– тарихқа шолу



– практикалық және шығармашылық
тапсырмалар



– теорема дәлелдеудің соңы

A

– бастапқы деңгейлі есептер

B

– орта деңгейлі есептер

C

– жоғары деңгейлі есептер

– күрделілігі жоғары есептер

Шыныбеков Ә.Н. және т.б.

ІІ 97

Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбы-
на арналған оқулық. /Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыны-
беков, А.И. Бектасова – Алматы: Атамұра, 2025. –
128 бет.

ISBN 978-601-10-0657-6

ISBN 978-601-10-0657-6

© Шыныбеков Ә.Н.,
Шыныбеков Д.Ә.,
Бектасова А.И., 2025
© «Атамұра», 2025

АЛҒЫ СӨЗ

Геометрия – ең ежелгі ғылымдардың бірі. «Геометрия» сөзі «жер өлшеу» (гректің «гео» – жер, «метрео» – өлшеу) сөзінен шыққан. Бұл атау адамзаттың ертеректен бастап жер бетінде өлшеу жұмыстарын жүргізуі, құрылыс, жол тарту және т.с.с. жұмыстарының салдарына байланысты пайда болған. Олар жер бетінде түрлі өлшеу жұмыстары нәтижелерін белгілеп, сызықтар мен белгілер салуына тура келген. Осының нәтижесінде біртіндеп қарапайым геометриялық фигуралардың қасиеттері жөніндегі мәліметтер жинақтала бастады. Сонымен қатар осы кезеңде бір-бірімен байланыссыз, жеке-дара жинақталған мәліметтерді біріктіруде алғашқы қадамдар да жасалды. Дегенмен, бұл жұмыстар, негізінен қандай да бір фигураны немесе оның элементін тұрғызу үшін жасалатын іс-шаралардың ережелері ретінде жазылды. Бұл жұмыстарда «дәлелдеу» ұғымы мүлде болмаған деуге болады және бұл ережелер «былай жаса» деген қағидамен жазылған еді.

Ежелгі грек ғалымы Евклидтің (біздің з.б. 365 – 300 жж.) «Бастамалар» атты шығармаларының пайда болуымен фигуралар мен олардың қасиеттері жөніндегі ғылым – «Геометрияның» дүниеге келуін байланыстырады. Мұнда ол геометриялық фигуралар жөнінде жинақталған барлық мәліметтерді бір қалыпқа келтірген. Сондай-ақ күнделікті өмірден алынған қарапайым және ақиқат тұжырымдарға – аксиомаларға сүйене отырып, геометриялық фигуралар жөніндегі осыған дейін жинақталған барлық деректерді қисынды пайымдаулар жолымен алған. Осылайша геометрияны жаңа деректермен байыта түскен. Ал Евклидтің геометрияның негізін жасауда қолданған тәсілі кейінірек **аксиоматикалық тәсіл** деп аталды және бұл тәсіл қазіргі кезең математикасы мен өзге де ғылымдар саласында кең көлемде қолданылуда.

Сонымен геометрия ерте кезден-ақ жоғары теориялық тұрғыдан оқытылған: әрбір **теорема** дәлелденеді, ал кез келген есеп **аксиомалар** мен осыған дейін дәлелденген теоремаларға сүйене отырып шығарылады. Олай болса, геометрияны оқып-үйрену барысында сендер геометриялық фигуралардың қасиеттері жөніндегі білімдеріңді жетілдіріп қана қоймай, қисынды ойлау қабілеттеріңді шыңдап, ақиқаттық пайымдау тәсілдерін үйренесіңдер, ал бұл тек математиканы ғана оқып-үйренуге емес, ғылымның салаларын жете меңгеруге көмектесері сөзсіз.

Жалпы білім беретін мектептердің 7-сыныбына арналған «Геометрия-7» оқулығының өзге оқулықтармен салыстырғанда бірқатар өзіндік ерекшеліктері бар. Әрбір тақырыпқа берілген есептер арнайы үш топқа бөлінген: **A**, **B** және **C**. **A** және **B** тобындағы есептер жеңіл және орташа қиындықтағы деңгейде, ал **C** тобына қиындық деңгейі жоғары есептер жинақталған. Бұл оқулықтың әрі жалпы білім беретін мектептерде, әрі математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарда қолданылуына жол ашады. Мұнда **C** тобы есептері негізінен, математиканы тереңдетіп оқытатын сынып оқушылары мен математикаға қабілеті жоғары оқушыларға арналған. Сонымен бірге оқушыларға ыңғайлы болуы үшін әрбір бөлім есептері мен қажетті сызбалары қос сандармен нөмірленген. Оның біріншісі – тарау (бөлім) нөмірін, ал екіншісі осы тараудағы есептің (немесе сызбаның) реттік нөмірін көрсетеді.

Жалпы оқулықпен дәріс алу барысында оқу бағдарламасы ерекшеліктеріне тәуелсіз мынадай қағиданы ұстанған дұрыс: жаңа өтілген тақырыпты пысықтау барысында, ең алдымен **A** тобы материалдарын толық меңгеріп алу қажет. Онсыз келесі **B**, **C** топтары есептерін шығару және келесі тақырыпты меңгеру мүмкін емес.

7-сыныпта қолданылатын геометриялық белгілеулер:

$A, B, C, \dots$ – нүктелер

$a, b, c, \dots$ – түзулер

$\angle A$ – A бұрышы

$\angle(ab)$ – (ab) бұрышы (a және b сәулелерімен шектелген бұрыш)

$\triangle ABC$ – ABC үшбұрышы

$\omega(O; R)$ – центрі O нүктесі, радиусы R -ге тең шеңбер

$\smile$ – шеңбер доғасының белгіленуі

$\parallel$ – параллельдік белгісі

$\perp$ – перпендикулярлық белгісі

$\cap$ – қиылысу белгісі

$\cup$ – бірігу белгісі

$\in, \notin$ – тиісті және тиісті емес белгілері

$\Rightarrow$ – логикалық салдар белгісі (шығады)

$\Leftrightarrow$ – тең шамалылық белгісі

КІРІСПЕ

Өздерің білетіндей геометрия – ол геометриялық фигуралардың қасиеттері жөніндегі ғылым. Үшбұрыш, квадрат, шеңбер, куб, шар, цилиндр (1-сурет) және т.с.с. геометриялық фигуралардың мысалдары болып табылады.



1-сурет

Геометриялық фигуралардың бөліктері, қиылысуы және бірігулері де геометриялық фигура болады.

Мектеп геометриясы **планиметрия** және **стереометрия** деген атаулармен екі бөлікке бөлінеді. Планиметрияда жазықтықта орналасқан кесінді, үшбұрыш, тіктөртбұрыш және т.с.с. фигуралардың қасиеттері қарастырылады. Жазықтық шексіз болғандықтан, оның бір бөлігінің мысалы ретінде тынық судың, үстелдің, партаның, дәптердің, т.с.с. тегіс бетін қарастыруға болады. Стереометрияда кеңістікте орна-

ласқан параллелепипед, сфера, цилиндр, пирамида және т.с.с. фигуралардың қасиеттері қарастырылады. Біз геометрияны мүмкіндігінше қатаң теориялық деңгейде, планиметриядан бастап оқып үйренеміз. Бұл – геометрияның негізін жасаудың *аксиоматикалық тәсілі*. Енді соңғы айтылған сөйлемнің мәні мен мазмұнына қысқаша түсініктеме берейік.

Жалпы математикада кез келген тұжырым (теорема, сөйлем, қасиет, белгі және т.с.с.) бұрыннан белгілі, одан ертерек дәлелденген тұжырымдарға сүйене отырып дәлелденеді (негізделеді). *Теоремалардың* қисындық құрылымы мынадай болып келеді. Егер A_1 – бұрынғырақ дәлелденген қандай да бір тұжырым болса (оны «шарты» деп атайық), онда осы тұжырымға сүйене отырып, қисынды ой қорытындылар көмегімен жаңадан бір A сөйлемін (тұжырымын, теоремасын, қасиетін және т.с.с.) қорытып шығарамыз. Осыны қисынды салдар символымен ($\Rightarrow$) қысқаша былай жазуға болады: $A_1 \Rightarrow A$. Енді соңына дейін қатаң математикалық дәлелдеулер қағидасына жүгінетін болсақ, онда A_1 теоремасының өзі дәлелдеуді талап етеді және оны дәлелдеу үшін A_1 -ден ертерек дәлелденген қандай да бір A_2 теоремасына сүйенуіміз қажет. Көрсетілген процесс шексіз жалғасып, оны «аяқтау» ешкімнің қолынан келмейтін жұмыс, яғни біз төмендегідей теоремалар тізбесін алар едік:

$$\dots \Rightarrow A_4 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A \quad (1)$$

немесе мынадай циклді тізбек шығар еді:

$$\begin{array}{c} \Rightarrow A_3 \Leftarrow \\ A_4 \Leftrightarrow A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A \dots \\ \Leftarrow A_5 \Rightarrow \end{array} \quad (2)$$

Осы сияқты әрбір жаңа түсінік ертеректен белгілі түсініктер көмегімен анықталады. Мысалы, «барлық бұрыштарының шамасы 90° -тан және барлық қабырғасы өзара тең болатын төртбұрышты квадрат деп атаймыз». Мұнда «квадрат» деген жаңа ұғым «төртбұрыш», «қабырға», «бұрыш»

және т.с.с. ұғымдарға сүйеніп анықталды. Енді осы көрсетілген ұғымдарды анықтау үшін де өзге белгілі ұғымдарға сүйенуіміз қажет, яғни әрбір ұғымға **анықтама** беру әрекеті (1) және (2) түрдегідей шексіз анықтамалар тізбесіне алып келеді. Осыдан теоремалар мен түсініктердің көрсетілген шексіз тізбелерін түзу қажеттілігі туындайды. Кейбір түсініктерді негізгі түсініктер деп алып, оларды анықтамасыз, ал кейбір теоремаларды **аксиомалар** деп атап, оларды дәлелдеусіз алынатын ақиқат тұжырымдар ретінде қабылдау мұқтаждығы туындайды. Ал енді кейбір түсініктерді анықтамасыз қабылдағандықтан, олардың арасында қандай қатынастар бар екенін білуіміз қажет. Мұндай қатынастар алдын ала айтылады, оларды теорияның **негізгі қатынастары** деп атайды. Мұнда біз геометрияны аксиоматикалық тұрғыдан қалыптастырудың қарапайым жоспарын ғана келтірдік. Мұны жалпы және мағыналы жүйеде білген дұрыс. Себебі біз геометрияны оқып-үйрену үдерісінде әрбір тұжырымды, қасиетті және теореманы қабылданған аксиомалар жүйесіне сүйене отырып, дәлелдейміз. Қабылданған негізгі түсініктер мен қатынастар негізінде, әрбір ұғымға анықтама береміз. Сондықтан өздеріңе белгілі ұғымдарға «қайтадан» анықтама берудің және оқып-үйренген қарапайым геометриялық фигуралардың «ақиқат», «онсыз да түсінікті» қасиеттерін дәлелдеудің қажеті жоқ деп ойлаймыз. Ал бұлай ойлау геометрия негіздерін дұрыс ұғынуға айтарлықтай кедергі болары ақиқат.

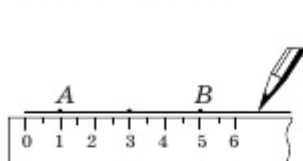
1. ПЛАНИМЕТРИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ТҮСІНІКТЕРІ МЕН АКСИОМАЛАРЫ

1.1. Нүкте, түзу және кесінді

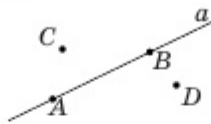
1.1.1. Нүкте және түзу. Нүкте мен түзу – жазықтықтағы негізгі фигуралар. Нүктелерді латын алфавитінің үлкен әріптерімен: $A, B, C, D, \dots$ деп, ал түзулерді осы алфавиттің кіші әріптерімен: $a, b, c, d, \dots$ деп белгілейді. Түзуді қағаз бетінде салу үшін сызғышты қолданады (1.1-сурет), бірақ мұнда түзудің белгілі бір бөлігін ғана бейнелеуге болады, ал бүкіл түзуді екі жағына да шексіз ұласа береді деп елестетеміз.

1.2-суретте A, B, C, D нүктелері мен a түзуі бейнеленген. A және B нүктелері a түзуінде жатады, яғни нүктелер түзуге тиісті. Оны былай жазады: $(A \in a, B \in a)$. Ал C және D нүктелері бұл түзу бойында жатпайды, яғни бұл нүктелер түзуге тиісті емес: $(C \notin a, D \notin a)$. Мұны a түзуі A және B нүктелері арқылы өтеді деп те айтады. Түзуді екі нүктесі арқылы белгілеуге болады. Мысалы, a түзуін AB деп те белгілейді.

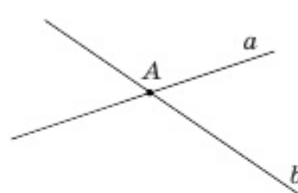
Егер екі түзудің тек бір ғана ортақ нүктесі бар болса, онда бұл түзулерді қиылысады деп айтады. Ал олардың жалғыз ортақ нүктесін осы түзулердің *қиылысу нүктесі* деп атайды. 1.3-суретте a және b түзулері A нүктесінде қиылысады. Оны былай жазады: $a \cap b = A$.



1.1-сурет



1.2-сурет



1.3-сурет

Сонымен нүктенің түзуде жататындығы (түзудің нүкте арқылы өтетіндігі) негізгі қатынастардың бірі болып табылады. Жазықтықтағы нүктенің түзуге тиістілігін төмендегі *аксиома* айқындайды (аксиома деп дәлелдеуді қажет етпейтін тұжырымды айтады).

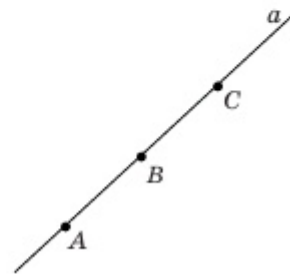
I. Түзу қандай болса да, оның бойында жататын және оның бойында жатпайтын нүктелер табылады. Әрбір екі нүкте арқылы бір ғана түзу жүргізуге болады.

Енді I аксиоманың салдары ретінде келесі мысалдағы тұжырымды дәлелдейік.

1-мысал. Өртүрлі екі түзу екі немесе одан да көп нүктелерде қиылыса алмайтынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Қандай да бір a және b түзулерінің ортақ өртүрлі A және B нүктелері арқылы a және b екі түзуі өтетіндігі шығады. Бұл I аксиомаға қайшы. Алынған қайшылық өртүрлі екі түзудің бір нүктеден артық ортақ нүктелері болмайтынын көрсетеді.

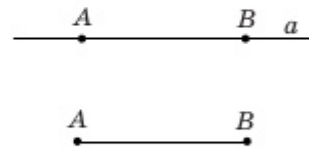
1.4-суретте a түзуі мен осы түзу бойынан A , B және C нүктелері берілген. Мұнда B нүктесі A және C нүктелерінің *арасында жатыр*, яғни a түзуінің бойында B нүктесі A мен C нүктелерін бөліп тұр. Бұл жағдайда A және C нүктелері B нүктесінің *екі жағында жатады* деп немесе B және C нүктелері A нүктесінің *бір жағында жатады* деп немесе B және C нүктелері A нүктесімен *бөлінбейді* деп те айтады. Біз мұнда бұрынғы түсініктерге сүйеніп, түзу нүктелері арасындағы жаңа қатынасты қарастырдық. Сондықтан түзу нүктелері арасындағы негізгі қатынас ретінде «*арасында жатады*» қатынасы алынып, оның мағынасы төмендегі аксиомамен айқындалады.



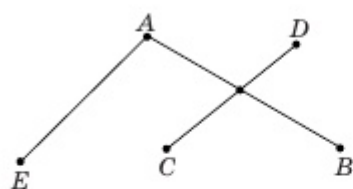
1.4-сурет

II. Түзу бойындағы үш нүктенің тек біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады.

1.1.2. Кесінді. Енді біз кесінді ұғымына анықтама бере аламыз. Айталық, A және B нүктелері a түзуінің бойында жатсын. Онда a түзуінің A және B нүктелері (A мен B -ні қоса алғанда) арасында орналасқан нүктелер жиынын AB *кесіндісі* деп атайды, яғни a түзуінің A және B нүктелерімен шектелген бөлігін AB кесіндісі дейді (1.5-сурет). Кесіндіні шектейтін нүктелерді оның *үштары* деп,



1.5-сурет



1.6-сурет

ал өзге нүктелерінің барлығын оның *ішкі нүктелері* деп атайды. Мысалы, 1.4-суретте B нүктесі – AC кесіндісінің ішкі нүктесі, ал A және C нүктелері – оның *үштары*.

Егер екі кесіндінің тек бір ғана ортақ ішкі нүктесі бар болса, онда бұл кесінділерді *қиылысады* деп айтады. Мысалы, 1.6-суретте AB және CD , AB және AE кесінділері қиылысады, ал AE және CD кесінділері қиылыспайды.

Кесіндіні өлшеу үшін өлшеу бірлігі болуы қажет. 1.7-суретте бейнеленген кесіндіні *бірлік кесінді* деп қабылдайық, оның ұзындығы 1 см. Егер қайсыбір AB кесіндісінің бойында осындай бірлік кесіндінің үшеуі болса, онда AB кесіндісінің ұзындығы 3 см деп есептейміз (1.8-сурет).

Ал егер EF кесіндісінің бойында бірлік кесіндінің біреуі бір рет және бірлік кесіндінің оннан жеті бөлігі болса, онда EF кесіндісінің ұзындығы 1,7 см болады. Оны былай жазады: $AB = 3$ см, $EF = 1,7$ см.

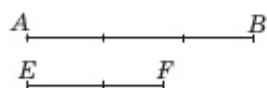
Сонымен кесіндінің ұзындығын өлшеу – негізгі ұғым, оның қасиеттерін төмендегі *аксиома* айқындайды.

III. Өрбір кесіндінің нөлден үлкен ұзындығы бар. Кесіндінің ұзындығы оның әрбір нүктесімен бөлінетін бөліктерінің ұзындықтарының қосындысына тең.

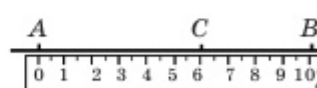
Бұл AB кесіндісі кез келген C нүктесімен екі бөлікке бөлінгенде, AB кесіндісінің ұзындығы AC және CB кесінділерінің ұзындықтарының қосындысына тең дегенді білдіреді. Мысалы, 1.9-суретте $AB = 10$ см, $AC = 6$ см, $CB = 4$ см, яғни $AB = AC + CB$ болатынын көреміз.



1.7-сурет



1.8-сурет



1.9-сурет

AB кесіндісінің ұзындығын A және B нүктелерінің **арақашықтығы** деп те атайды.

2-мысал. A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатады және $AB = 5,8$ см, $AC = 2,5$ см, $BC = 3,3$ см екені белгілі, A нүктесі B мен C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? B нүктесі A мен C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? A, B, C нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің арасында жатады?

Шешуі. Егер A нүктесі B мен C нүктелерінің арасында жататын болса, онда III аксиома бойынша $AB + AC = BC$ болуы қажет. Бірақ $5,8 + 2,5 \neq 3,3$. Олай болса, A нүктесі B мен C нүктелерінің арасында жата алмайды.

Егер B нүктесі A мен C нүктелерінің арасында жатса, онда $AB + BC = AC$ теңдігі орындалуы керек. $5,8 + 3,3 \neq 2,5$ болғандықтан, B нүктесі де A мен C нүктелерінің арасында жатпайды.

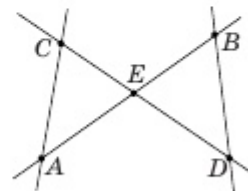
II аксиома бойынша түзу бойындағы үш нүктенің біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады. Олай болса, C нүктесі A мен B нүктелерінің арасында жатыр.



1. Геометриялық фигураларға мысалдар келтіріңдер.
2. Жазықтықтағы негізгі фигураларды атаңдар.
3. Нүктелер мен түзулер қалай белгіленеді?
4. Екі нүкте арқылы неше түзу жүргізуге болады?
5. Екі түзудің неше ортақ нүктесі болуы мүмкін?
6. Кесінді деген не?
7. Кесіндіні өлшеудің негізгі қасиеттерін атаңдар.
8. Екі нүктенің арақашықтығы деп нені түсінеміз?



1. $A \in a$, және $B \in a$ болатындай A және B нүктелері мен a түзуі берілген. Берілген мәліметтерді сызба арқылы көрсетіңдер.
2. a түзуі берілген. a мен AB түзулері A және B нүктелерінің арасында жататын C нүктесінде қиылысатындай етіп, A, B, C нүктелерін белгілеп көрсетіңдер.
3. 1.10-сурет бойынша: 1) барлық қиылысатын түзулер жұбын және олардың қиылысу нүктелерін жазып көрсетіңдер; 2) Барлық қиылысатын кесінділер жұбын және олардың ортақ нүктелерін жазып көрсетіңдер.
4. a түзуін сызып, оның бойынан A және B нүктелерін салыңдар.



1.10-сурет

- 1) AB кесіндісінде жататын M және N нүктелерін; 2) a түзуінде жататын, бірақ AB кесіндісіне тиісті емес P және Q нүктелерін; 3) a түзуінде жатпайтын R және S нүктелерін салып көрсетіңдер.

Жаттығулар

А

- 1.1. M нүктесі CD түзуінің C және D нүктелері арасында жатыр. 1) $CM = 2,5$ см, $MD = 3,5$ см; 2) $CM = 3,1$ дм, $MD = 4,6$ дм; 3) $CM = 12,3$ м, $MD = 5,8$ м деп алып, CD кесіндісінің ұзындығын табыңдар.
- 1.2. Түзу бойынан A және B екі нүктесін алып, AB кесіндісінің ортасын көз мөлшерімен белгілеңдер. Белгіленген нүктенің дұрыстығын сызғышты пайдаланып тексеріңдер.
- 1.3. A , B , C нүктелері бір түзу бойында жатыр. $AB = 4,3$ см, $AC = 7,5$ см, $BC = 3,2$ см екені белгілі. 1) A нүктесі B және C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? 2) C нүктесі A және B нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? 3) A , B , C нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің арасында орналасқан?
- 1.4. A , B , C нүктелері бір түзудің бойында жатыр. Егер $AC = 5$ см, $BC = 7$ см болса, онда B нүктесі AC кесіндісінде жатуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 1.5. X нүктесі AB түзуінің A және B нүктелерінің арасында жатыр. $AX = 2,5$ см, $XB = 3,4$ см деп алып, AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар (1.11-сурет).



1.11-сурет

- 1.6. M нүктесі K және P нүктелерінің арасында жатыр. $KP = 0,9$ дм, $KM = 0,3$ дм. M мен P нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

- 1.7. Егер: 1) $AB = 2,5$ см, $BC = 3,8$ см, $AC = 1,3$ см; 2) $AB = 1,9$ дм, $BC = 2,9$ дм, $AC = 4,8$ дм болса, онда A , B , C нүктелері бір түзудің бойында жата ма?

В

- 1.8. Үшеуі бір түзудің бойында жатпайтындай етіп, жазықтықтан төрт нүкте белгілеңдер. Олардың әрбір екеуі арқылы түзу жүргізіңдер. Барлығы неше түзу жүргізілді?
- 1.9. Жазықтықта төрт түзу берілген және олардың әрбір екеуі қиылысады. Егер осы қиылысу нүктелері арқылы тек екі түзу ғана өтетін болса, онда барлығы неше қиылысу нүктесі болғаны?
- 1.10. P , Q , R нүктелері бір түзудің бойында жатыр. Егер $PR = 7$ см, $QR = 7,6$ см болса, онда Q нүктесі P және R нүктелерін бөліп тұра ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 1.11. Егер $AB = 1,8$ м, $AC = 1,3$ м, $BC = 3$ м болса, онда A , B , C нүктелері бір түзудің бойында жата ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 1.12. C нүктесі – AB кесіндісінің ортасы, ал O – AC кесіндісінің ортасы. Егер: 1) $AB = 2$ см болса, онда AC , CB , AO , OB кесінділерінің ұзындығын; 2) $CB = 3,2$ м болса, онда AB , AC , AO және OB кесінділерінің ұзындығын табыңдар.
- 1.13. 1) A , B , C нүктелері a түзуінде жатыр. $AB = 5$ см, $BC = 7$ см. AC -нің ұзындығы қандай болуы мүмкін? 2) C нүктесі – AB кесіндісінің ортасы, $AB = 7$ м 58 см болса, AC -нің ұзындығын дециметр есебімен табыңдар.
- 1.14. 1) M , N , K нүктелері m түзуінде жатыр және $MN = 8$ см, $NK = 12$ см. MK кесіндісінің ұзындығы қандай болуы мүмкін? 2) Егер F нүктесі – EL кесіндісінің ортасы және $EF = 3$ дм 12 см болса, онда EL кесіндісінің ұзындығы неше метр?

1.15. 1) A және B нүктелері a түзуінің екі жағында жатыр және $C \in a$, $AB = 37$ дм, $AC = 12$ дм, $BC = 26$ дм. C нүктесі AB кесіндісі мен a түзуінің қиылысу нүктесі бола ма?

2) $AC = DB$, C нүктесі A және D нүктелері арасында жататындай AB кесіндісінен C және D нүктелері алынған. $AB = 58$ см, $CD = 2,8$ дм. AC және BD кесінділері орталарының арақашықтығын табыңдар (1.12-сурет).



1.12-сурет

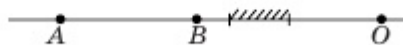
1.16. 1) A және B нүктелері b түзуіне тиісті емес және оның әртүрлі жағында жатыр, $C \in b$, $AB = 29$ см, $AC = 14$ см, $BC = 16$ см. C нүктесі AB және b түзулерінің қиылысу нүктесі бола ма? 2) CD кесіндісінің бойынан E нүктесі C және F нүктелерінің арасында жататындай және $CE = DF$ болатындай етіп, E мен F нүктелері алынған. CE және DF кесінділері орталарының арақашықтығы 8,5 дм, ал $CD = 1,2$ м болса, EF -ті табыңдар.

C

1.17. A , B , C және D нүктелері берілген. A , B , C нүктелерінің бір түзудің бойында жататыны және B , C , D нүктелерінің де бір түзудің бойында жататыны белгілі. Барлық төрт нүкте бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

1.18. p , q , m және n түзулері берілген. p , q , m түзулері бір нүктеде және q , m , n түзулері де бір нүктеде қиылысатыны белгілі. Осы төрт түзудің бір нүкте арқылы өтетінін дәлелдеңдер.

1.19. $OA = 12$ см, $OB = 9$ см болатындай бір түзудің O , A , B нүктелері берілген. O нүктесі: 1) AB кесіндісінде жатады; 2) AB кесіндісінде жатпайды деп алып, OA және OB кесінділері орталарының арақашықтығын табыңдар (1.13-сурет).



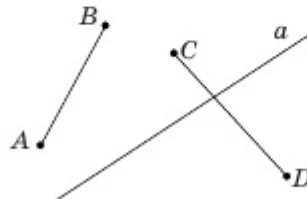
1.13-сурет

- 1.20. Ұзындығы a -ға тең кесінді өзінің кез келген нүктесімен екі бөлікке бөлінген. Осы бөліктердің орталарының арақашықтығын табыңдар.
- 1.21. Ұзындығы 28 см болатын кесінді өзара тең емес үш бөлікке бөлінген. Шеткі екі бөліктерінің орталарының арақашықтығы 16 см. Ортанғы кесіндінің ұзындығын табыңдар.
- 1.22. 1) P , A және B нүктелері a түзуінде жатыр. $AB = 6$ см және $PA + PB = 9$ см. PA мен PB кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.
2) Түзу бойында $AB = CD$ болатындай етіп, A , B , C және D нүктелері белгіленген. Ұштары көрсетілген нүктелерде жататындай және өзара тең болатындай өзге де кесінділер жұбы табыла ма?
- 1.23. AB және CD кесінділері бір түзу бойында жатыр, ал B мен C – бұл кесінділердің ең жақын орналасқан нүктелері. Егер $BC = 5$ см және осы кесінділердің орталарының қашықтығы 17 см болса, AD -ні табыңдар.

1.2. Жарты жазықтық, сәуле және бұрыш

1.2.1. Жарты жазықтық. Кез келген түзу жазықтықты екі *жарты жазықтыққа* бөледі. Жазықтықтың бұлайша бөліктенуінің мынадай қасиеттері бар: егер кесіндінің ұштары бір жарты жазықтықта жатса, онда кесінді a түзуін қиып өтпейді, ал кесіндінің ұштары өртүрлі жарты жазықтықтарда жатса, онда кесінді a түзуін қиып өтеді.

1.14-суретте A және B нүктелері a түзуімен бөлінетін бір жарты жазықтықта орналасқан. Сондықтан AB кесіндісі a түзуін қиып өтпейді. C және D нүктелері өртүрлі жарты жазықтықтарда жатқандықтан, CD кесіндісі a түзуін қиып өтеді.



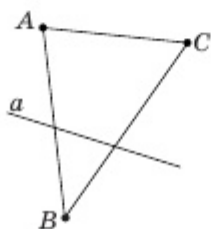
1.14-сурет

Жазықтықтағы түзу мен нүктелердің өзара орналасуын төмендегі *аксиома* айқындайды.

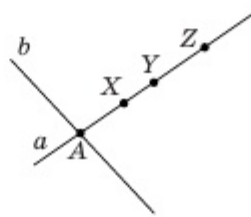
IV. Түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі.

1-мысал. a түзуі мен осы түзуде жатпайтын A, B, C нүктелері берілген. a түзуі AB кесіндісін қиып өтетіні, ал AC кесіндісі a түзуімен қиылыспайтыны белгілі. a түзуі BC кесіндісін қиып өте ме?

Шешуі. a түзуі жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі (1.15-сурет). a түзуі AC кесіндісін қимайды, сондықтан A және C нүктелері бір жарты жазықтықта орналасқан. Ал a түзуі AB кесіндісін қиып өтеді, олай болса, A және B нүктелері әртүрлі жарты жазықтықтарда жатады. Онда B және C нүктелері де әртүрлі жарты жазықтықтарда орналасқан, яғни BC кесіндісі a түзуін қиып өтеді.



1.15-сурет



1.16-сурет

1.2.2. Сәуле. **2-мысал.** a түзуі және осы түзу бойынан A, X, Y, Z нүктелері алынған (1.16-сурет). X және Y нүктелері A нүктесінің бір жағында жататыны, X және Z нүктелерінің де A нүктесінің бір жағында жататыны белгілі. Y және Z нүктелері A нүктесіне қатысты қалай орналасқан: бір жағында ма әлде екі жағында ма?

Шешуі. A нүктесі арқылы өтетін a түзуінен өзгеше b түзуін жүргізейік. Бұл түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. Осы жарты жазықтықтардың бірінде X нүктесі жатады. Есеп шарты бойынша X және Y, X және Z нүктелері a түзуінде A нүктесінің бір жағында орналасқан, онда XY және XZ кесінділері b түзуімен қиылыспайды, яғни A нүктесі XY және XZ кесінділерінде жатпайды. Онда A нүктесі YZ кесіндісіне де тиісті емес (YZ b түзуімен қиылыспайды), яғни Y және Z нүктелері A нүктесінің бір жағында жатыр.

Түзудің берілген нүктесінен оның бір жағында орналасқан нүктелерінің жиынын *сәуле* немесе *жарты түзу* деп атай-

ды. Бұл берілген нүктені сәуленің **бастапқы нүктесі** деп атайды. Түзудің әрбір нүктесі оны екі сәулеге бөледі және олардың бастапқы нүктелері ортақ. Түзудің осындай бастапқы нүктелері ортақ болып келген әртүрлі сәулелері бір-бірінің **толықтауыш сәулелері** деп аталады.

Сәулелерді де түзулер сияқты латынның кіші әріптерімен немесе екі нүктемен: бастапқы нүктесі және осы сәуледе жататын екінші нүкте арқылы екі әріппен де белгілеуге болады. Сәуленің бастапқы нүктесі үнемі бірінші жазылады. Мысалы, 1.17-суретте қалың сызықпен бейнеленген сәулені AB деп белгілейді.

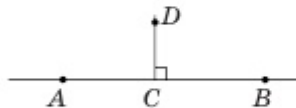


1.17-сурет

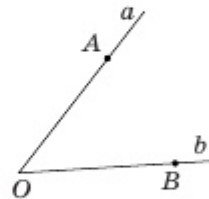
1.2.3. Бұрыш. **Бұрыш** деп бастапқы нүктелері ортақ болатын әртүрлі жарты түзулерден құралған фигураны айтады. Бұл ортақ нүкте **бұрыштың төбесі** деп, ал жарты түзулер **бұрыштың қабырғалары** деп аталады. Егер бұрыш қабырғалары өзара толықтауыш сәулелер болса, онда мұндай бұрышты **жазыңқы (жазық) бұрыш** деп атайды. Жазыңқы бұрыштың тең жартысы **тікбұрыш** деп аталады. Суретте көбінесе тікбұрыштарды $\perp$ белгісімен көрсетеді (1.18-сурет).

1.19-суретте төбесі O және қабырғалары a, b сәулелері болатын бұрыш бейнеленген. Бұрыштың белгіленуі: $\angle$.

1.19-суреттегі бұрышты үш түрлі тәсілмен белгілеуге болады: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. Үшінші тәсілінде ортанғы әріп міндетті түрде бұрыш төбесін көрсетеді.



1.18-сурет



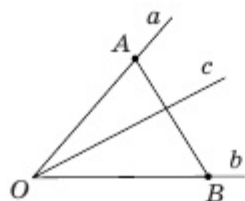
1.19-сурет

Егер бұрыш төбесінен шығатын сәуле ұштары бұрыш қабырғаларында орналасқан кесіндіні қиып өтсе, онда бұл сәулені осы бұрыш қабырғаларының арасы арқылы өтеді деп айтады.

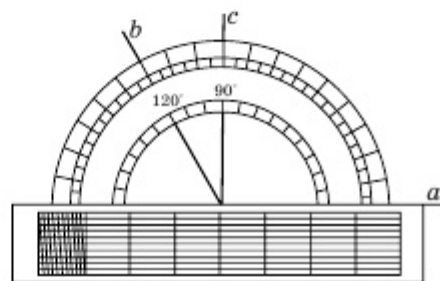
Мысалы, 1.20-суретте c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасы арқылы өтеді, себебі оның бастапқы нүктесі (ab) бұрышының төбесінде жатады және ол AB кесіндісін қиып өтеді. Мұнда $A \in a$, $B \in b$. Жазыңқы бұрыш жағдайында оның төбесінен шығатын және қабырғаларынан басқа кез келген сәулені осы бұрыш қабырғалары арасынан өтеді деп есептейміз.

Егер нүкте бұрыш қабырғалары арасынан өтетін сәуледе жатса, онда бұл нүктені бұрыштың **ішкі нүктесі** деп атайды. Ал бұрыштың ішкі нүктесі болмайтын және оның қабырғаларында жатпайтын нүктені бұрыштың **сыртқы нүктесі** деп атайды.

Бұрыштың барлық ішкі нүктелерінің жиыны оның **ішкі аймағы** деп, ал барлық сыртқы нүктелерінің жиыны **сыртқы аймағы** деп аталады.



1.20-сурет



1.21-сурет

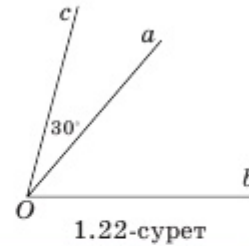
Бұрышты өлшеу үшін транспортирді қолданады. 1.21-суретте көрсетілген (ab) бұрышының шамасы 120° -қа тең, ал c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасынан өтеді. (ab) бұрышы (ac) және (bc) бұрыштарының қосындысына тең.

V. Әрбір бұрыштың нөлден үлкен белгілі бір градусық өлшемі бар. Жазыңқы бұрыштың шамасы 180° -қа тең. Бұрыштың градусық өлшемі осы бұрыштың қабырғалары арасы арқылы өтетін кез келген сәулемен бөлінетін бөліктерінің градусық өлшемдерінің қосындысына тең.

Бұл айтылғандардың мағынасы мынадай: егер c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасынан өтсе (1.20-сурет), онда $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$ теңдігі орындалады.

3-мысал. Егер $\angle(ac) = 30^\circ$, $\angle(cb) = 80^\circ$, $\angle(ab) = 50^\circ$ болса, c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасы арқылы өте ме?

Шешуі. Егер c сәулесі (ab) бұрышы қабырғаларының арасы арқылы өтсе, онда V аксиома бойынша мына теңдік орындалуы қажет: $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$. Ал $30^\circ + 80^\circ \neq 50^\circ$. Олай болса, c сәулесі (ab) бұрышы қабырғалары арасынан өтпейді (1.22-сурет).



1.22-сурет

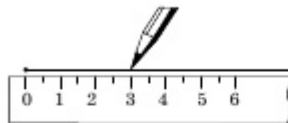
Бір градус (1°) – жазыңқы бұрыштың $\frac{1}{180}$ бөлігіне тең бұрыш.

Бұрышты өлшеу үшін басқа да ұсағырақ өлшем бірліктері қолданылады: 1 минут ($1'$), 1 секунд ($1''$). $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

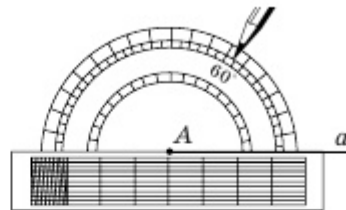
1.2.4. Кесінділер мен бұрыштарды өлшеп салу

1.23-суретте сызғышты пайдаланып, a сәулесінің бастапқы нүктесінен бастап ұзындығы белгілі (3 см) кесіндіні салу тәсілі көрсетілген.

1.24-суреттегі a сәулесі толықтауыш сәулемен бірге жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. Мұнда транспортирді пайдаланып, бір қабырғасы a сәулесі болатындай жоғарғы жарты жазықтықта градусық өлшемі берілген (60°) бұрышты салу тәсілі көрсетілген.



1.23-сурет



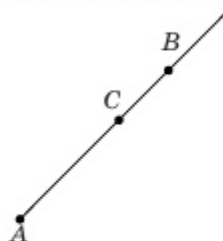
1.24-сурет

Кесінділер мен бұрыштарды өлшеп салуды төмендегі *аксиомалар* айқындайды:

VI. Кез келген сәуле бойынан оның бастапқы нүктесінен бастап ұзындығы берілген кесіндіні өлшеп салуға болады және бұл кесінді жалғыз болады.

VII. Кез келген сәуледен берілген жарты жазықтықта градусық өлшемі берілген бұрышты өлшеп салуға болады және бұл бұрыш жалғыз болады.

4-мысал. AB сәулесінде AB кесіндісінен кіші AC кесіндісі өлшеп салынған. A, B, C нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің арасында жатады?



1.25-сурет

Шешуі. B және C нүктелері бастапқы нүктесі A болатын сәуледе жатқандықтан (1.25-сурет), олар A нүктесімен бөлінбейді, демек, A нүктесі B және C нүктелерінің арасында жатпайды.

B нүктесі A және C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін бе? Егер B нүктесі A және C нүктелерінің арасында жатса, онда $AB + BC = AC$ болуы қажет. Бұлай болуы мүмкін емес, себебі есеп шарты бойынша AC кесіндісі AB кесіндісінен кіші. Олай болса, B нүктесі A және C нүктелерінің арасында жатуы мүмкін емес. Сондықтан C нүктесі ғана A мен B нүктелерінің арасында жатады.

1.2.5. Аксиомалар және теоремалар. Кіріспеде сендер геометрия құрылымының аксиоматикалық тәсілімен және алғаш рет аксиома, теорема ұғымдарымен таныстыңдар. Енді осы ұғымдарды тереңірек қарастырайық.

Дәлелдеусіз қабылданатын және қарапайым геометриялық фигуралардың негізгі қасиеттерін айқындайтын тұжырымды **аксиома** деп атайды. Аксиома гректің $\acute{\alpha}\xi\acute{\iota}\omega\mu\alpha$ (аксиос) деген сөзінен туындаған және «ақиқаттығы күмән келтірмейтін сөйлем» деген мағынаны білдіреді. Мысалы, IV аксиомада A сөйлемі ретінде жазықтықта жататын түзу берілген (бұл – тұжырымның шарты), ал B сөйлемі ретінде осы түзудің жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөлетіні алынады (бұл – тұжырымның қорытындысы). Сонда 4-аксиоманы былай жазамыз: $A \Rightarrow B$. Сонымен, бұл тұжырым жазықтық пен онда жататын түзу арасындағы қатынасты реттейтін аксиома ретінде қабылданған.

Геометрияда қабылданған аксиомалардан өзге тұжырымдардың барлығы дәлелденуі қажет. Мұндай дәлелдеуді қажет ететін тұжырымды **теорема** деп атайды.

Жалпы қарама-қарсы пікірлердің екеуі де ақиқат бола алмайды. Тұжырымның ақиқаттығына көз жеткізу процесін **дәлелдеу** деп айтады.

Теореманың шарты мен қорытындысы болады: шартында не берілгендігі, ал қорытындыда нені дәлелдеу керектігі айтылады. Енді теорема мен оны дәлелдеуге мысал келтірейік.

1-мысалдың қорытындысын төмендегідей теорема ретінде тұжырымдауға болады.

Теорема 1. Егер түзу қос-қостан ұштары ортақ үш кесіндінің біреуін қиып өтсе және кесінділердің ортақ ұштары арқылы өтпесе, онда бұл түзу қалған екі кесіндінің біреуін ғана қиып өтеді.

Айталық, a түзуі AB кесіндісін қиып өтсін (1.26, a -сурет).

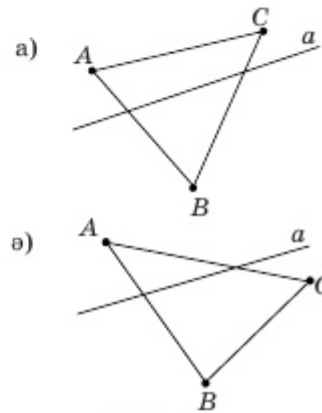
a түзуі жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі және AB кесіндісін қиып өтеді. Сондықтан A және B нүктелері өртүрлі жарты жазықтықтарда жатады, ал C нүктесі осы жарты жазықтықтардың тек біреуінде ғана жатады.

Дәлелдеуі.

1 Егер C нүктесі A нүктесімен бір жарты жазықтықта жатса, онда B және C нүктелері өртүрлі жарты жазықтықтарда жатады (1.26, a -сурет). Сондықтан a түзуі AC кесіндісімен қиылыспайды, ол BC кесіндісін қиып өтеді.

2 Егер C нүктесі B нүктесімен бір жарты жазықтықта жатса, онда A және C нүктелері өртүрлі жарты жазықтықтарда жатады. Олай болса, a түзуі BC кесіндісімен қиылыспайды, ол AC кесіндісін қиып өтеді.

Бұл екі жағдайда да a түзуі AC не BC кесінділерінің тек біреуін ғана қиып өтеді. ■



1.26-сурет

- Теоремаларды дәлелдеу үдерісінде аксиомаларды, дәлелденген теоремаларды немесе шешілген мысалдардың қорытындысын (соңғылар да теорема болып табылады) қолданады. Ал фигуралардың өзге дәлелденбеген қасиеттерін қолдануға мүлде болмайды.

- Геометриялық сызбалардан фигуралардың «көрініп тұрған» қасиеттерін де негіздеусіз қолдануға болмайды.



1. Жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөлудің қандай қасиеттері бар?
2. Жазықтықтағы нүктелердің түзуге қатысты орналасуының негізгі қасиеттерін тұжырымдаңдар.
3. Сәуле немесе жарты түзу деген не? Қандай сәулелер бір-бірінің толықтауыш сәулелері деп аталады?
4. Сәулені қалай белгілейді?
5. Бұрыш деген не? Бұрышты қалай белгілейді?
6. Қандай бұрышты жазыңқы (жазық) бұрыш деп атайды?
7. «Сәуле бұрыш қабырғалары арасынан өтеді» деген сөйлемді қалай түсінесіңдер?
8. Бұрыштарды өлшеудің негізгі қасиетін айтыңдар.
9. Кесінділер мен бұрыштарды өлшеп салудың негізгі қасиеттерін айтыңдар.
10. Аксиома деген не? Қандай тұжырымдамаларды теорема деп атайды?



1. Түзу бойынан A және B нүктелерін белгілеп, AB кесіндісінен C нүктесін алыңдар. AB , BC , CA , AC және BA сәулелері арасынан өзара беттесетін сәулелер жұбын көрсетіңдер.
2. Транспортирді пайдаланып, градусық өлшемі 90° , 50° , 120° болатын бұрыштарды салыңдар.
3. Көз мөлшерімен 30° , 45° , 60° -қа тең бұрыштар салып, олардың дұрыстығын транспортирді пайдаланып тексеріңдер.
4. Сынып бөлмесі ішінен тікбұрыштарға мысал келтіріңдер. Мүмкін болса, ол бұрышты транспортир немесе бұрыштықтың көмегімен тексеріңдер. Мұнда жазыңқы болатын бұрыш табыла ма? Жауаптарыңды негіздендер.
5. I–VII аксиомаларына сәйкес келетін суреттер салыңдар. Оны басқа оқушылардың сәйкес суреттерімен салыстырыңдар. Қорытынды ретінде сызбаға сәйкес аксиомаларды тұжырымдаңдар.

Жаттығулар

А

- 1.24. Жазыңқы емес (ab) бұрышын салып, осы бұрыш ішінен екі нүкте, сыртынан екі нүкте және қабырғаларынан екі нүкте белгілеп көрсетіңдер.
- 1.25. Жазыңқы емес бұрыш салып, AB кесіндісінің барлық нүктелері осы бұрыштың ішкі нүктелері болатындай және CD кесіндісінің барлық нүктелері бұрыштың

- 1.34. Сағаттың минуттық тілі 20 мин ішінде қандай бұрышқа бұрылады? 30 минутта ше?
- 1.35. 0,5 сағ ішінде сағат тілі қандай бұрышқа бұрылады? 5 минутта ше?
- 1.36. $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOK = 40^\circ$, $\angle MOB = 30^\circ$ болатындай етіп, AOB бұрышы мен оның OK , OM ішкі сәулелерін салыңдар. KOM бұрышын табыңдар.
- 1.37. Егер OM сәулесі AOB бұрышын қақ бөлсе, ал OK сәулесі AOM бұрышын қақ бөлсе, онда KOM бұрышы AOB бұрышынан неше есе кіші болады?
- 1.38. Егер: 1) $\angle(ac) = 30^\circ$, $\angle(ab) = 80^\circ$; 2) $\angle(ab) = 100^\circ$, $\angle(cb) = 90^\circ$; 3) (ac) бұрышы (ab) бұрышынан үлкен болса, онда c сәулесі (ab) бұрышының ішкі сәулесі бола ма?
- 1.39. $\angle(ab) = 60^\circ$, c – оның ішкі сәулесі. Егер: 1) (ac) бұрышы (bc) бұрышынан 30° үлкен; 2) (ac) бұрышы (bc) бұрышынан екі есе үлкен болса, онда (ac) және (bc) бұрыштарын табыңдар.
- 1.40. $\angle(mn) = 90^\circ$, l – оның ішкі сәулесі. Егер: 1) l сәулесі (mn) бұрышын қақ бөлсе; 2) (ml) және (nl) бұрыштарының градусық өлшемдерінің қатынасы 2:3 қатынасындай болса, онда (ml) және (nl) бұрыштарын табыңдар.
- 1.41. OE сәулесі AOB бұрышын екі бұрышқа бөледі. Егер: 1) $\angle AOE = 44^\circ$, $\angle EOB = 77^\circ$, 2) $\angle AOE = 12^\circ 37'$, $\angle EOB = 108^\circ 25'$ болса, онда AOB бұрышын табыңдар.

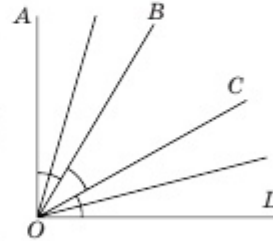
C

- 1.42. OC сәулесі – AOB бұрышының ішкі сәулесі. Егер $\angle AOB = 78^\circ$, ал AOC бұрышы BOC бұрышынан 18° кіші болса, онда COB бұрышын табыңдар.
- 1.43. OC сәулесі AOB бұрышын екі бөлікке бөледі. Егер

$\angle AOB = 155^\circ$ және AOC бұрышы COB бұрышынан 15° -қа үлкен болса, онда AOC бұрышын табыңдар.

1.44. AOB бұрышы – AOC бұрышының бөлігі. $\angle AOC = 108^\circ$, $\angle AOB = 3 \cdot \angle BOC$. AOB бұрышын табыңдар.

1.45. 1.28-суретте AOD бұрышы – тікбұрыш, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. AOB және COD бұрыштарын қақ бөлетін сәулелердің арасындағы бұрыштарды табыңдар.



1.28-сурет

1.46. Егер A , B және C нүктелері бір түзу бойы да жатса, және $AB = 20$ см, $AC = 15$ см, $CB = 35$ см болса, онда бұл нүктелер түзу бойында қалай орналасуы мүмкін? Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.3. Сыбайлас және вертикаль бұрыштар

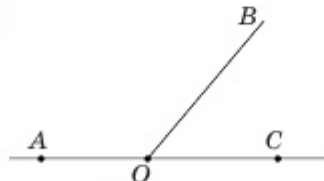
1.3.1. Сыбайлас және вертикаль бұрыштар. Егер екі бұрыштың бір қабырғасы ортақ, ал өзге екі қабырғасы бір-біріне толықтауыш сәулелер болса, онда бұл бұрыштарды **сыбайлас бұрыштар** деп атайды.

1.29-суретте AOB және BOC бұрыштары – сыбайлас бұрыштар. OA және OC – толықтауыш сәулелер.

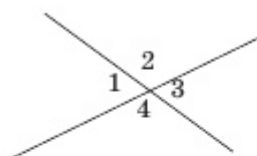
Теорема 2. Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең.

$\angle AOB$ мен $\angle BOC$ – сыбайлас бұрыштар. $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. OA және OC толықтауыш сәулелері жазыңқы бұрышты анықтайтын болғандықтан, $\angle AOC = 180^\circ$. Сыбайлас бұрыштардың анықтамасы бойынша $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180^\circ$. ■



1.29-сурет



1.30-сурет

Егер бір бұрыш қабырғалары екінші бұрыш қабырғаларының толықтауыш сәулелері болса, онда бұл бұрыштарды **вертикаль бұрыштар** деп атайды. 1.30-суреттегі 1 және 3-бұрыштар, 2 және 4-бұрыштар – вертикаль бұрыштар.

Теорема 3. Вертикаль бұрыштар өзара тең.

Дәлелдеуі. Сыбайлас бұрыштардың қасиеті бойынша:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \text{ осыдан } \angle 1 = 180^\circ - \angle 2;$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ, \text{ осыдан } \angle 3 = 180^\circ - \angle 2.$$

Олай болса, $\angle 1 = \angle 3$. ■

Шамасы 90° -қа тең бұрышты **тікбұрыш** деп атайды. 90° -тан кіші бұрышты **сүйір бұрыш** деп, ал 90° -тан үлкен және 180° -тан кіші бұрышты **доғал бұрыш** деп атайды (1.31-сурет).

Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең болғандықтан, сүйір бұрышқа сыбайлас бұрыш доғал, ал керісінше, доғал бұрышқа сыбайлас бұрыш сүйір болады. Осы сияқты тікбұрышқа сыбайлас бұрыш та тікбұрыш болады.



Тікбұрыш



Сүйір бұрыш



Доғал бұрыш

1.31-сурет

1-мысал. Сыбайлас бұрыштардың бірі екіншісінен 2 есе үлкен. Осы бұрыштарды анықтайық.

Шешуі. Кіші бұрыш шамасын x деп белгілейік. Онда онымен сыбайлас бұрыштың шамасы $2x$ -ке және олардың қосындысы 180° -қа тең, яғни $x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$. Олай болса, берілген сыбайлас бұрыштардың шамасы: 60° және 120° .

1.3.2. Перпендикуляр түзулер

Айталық, a және b түзулері A нүктесінде қиылыссын. Онда 4 жазыңқы емес бұрыш шығады. Егер бұл бұрыштардың біреуі тік болса, онда өзгелері де тікбұрыштар болады. Бұл түзулер жөнінде өзара тікбұрыш жасап қиылысады дейді.

Анықтама. Тікбұрыш жасап қиылысатын түзулерді өзара перпендикуляр деп атайды (1.32-сурет).

Перпендикулярлықты $\perp$ символымен белгілейді. $a \perp b$ жазуын: « a түзуі b түзуіне перпендикуляр» деп оқиды.

Теорема 4. Түзудің әрбір нүктесінен оған перпендикуляр болатын бір ғана түзу жүргізуге болады.

a түзуі мен осы түзу бойында жатқан A нүктесі берілсін.

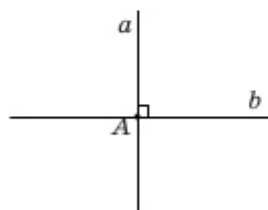
Дәлелдеуі. Айталық $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$ болып, A нүктесі B және C нүктелерінің арасында жатсын (1.33-сурет). AC сәулесі қабырғасы болатындай және шамасы 90° -қа тең CAD бұрышын салайық. Онда перпендикуляр түзулер анықтамасынан $AD \perp a$ болады.

Енді a түзуіне перпендикуляр болатын екінші бір AD_1 түзуі бар болсын делік. Онда $\angle CAD = 90^\circ$, әрі $\angle CAD_1 = 90^\circ$ және бұл бұрыштар a түзуінің бір жағында орналасқан.

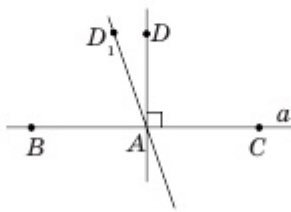
Берілген бұрышқа тең бұрышты өлшеп салу жөніндегі VII аксиома бойынша AC түзуінің бір жақ бөлігіне AC сәулесінен бастап шамасы 90° -қа тең болатын бір ғана бұрышты өлшеп салуға болады. Сондықтан A нүктесі арқылы өтетін және a түзуіне перпендикуляр болатын AD түзуінен өзге түзу табылмайды. ■

A нүктесі a түзуінен тысқары жатсын және осы A нүктесі арқылы өтетін a түзуіне перпендикуляр түзу a -ны B нүктесінде қиып өтсін. Онда AB кесіндісін a түзуіне жүргізілген **перпендикуляр** деп, ал B нүктесін осы **перпендикулярдың табаны** деп атайды.

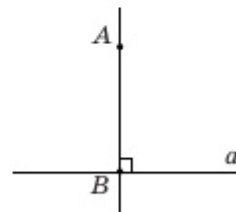
1.34-суретте A нүктесінен a түзуіне түсірілген перпендикуляр AB кесіндісі, ал B нүктесі оның табаны болады.



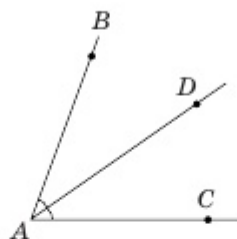
1.32-сурет



1.33-сурет



1.34-сурет



1.35-сурет

1.3.3. Бұрыш биссектрисасы. Бұрышты тең екі бөлікке бөлетін оның ішкі сәулесін осы *бұрыштың биссектрисасы* деп атайды. 1.35-суретте BAC бұрышының AD ішкі сәулесі оны тең бөліктерге бөледі: $\angle BAD = \angle DAC = \frac{\angle BAC}{2}$, яғни AD сәулесі BAC бұрышының биссектрисасы болады.

2-мысал. Биссектрисаның бұрыш қабырғаларымен жасайтын бұрыштарының шамасы 90° -тан артық болмайтынын көрсетейік.

Шешуі. Өрбір бұрыштың градустық өлшемі 180° -тан артық емес. Сондықтан оның жартысы 90° -тан артық болмайды.

1.3.4. Теоремаларды қарсы жорып дәлелдеу тәсілі

Геометрияда теоремаларды қарсы жорып дәлелдеу тәсілі жиі қолданылады. Дәлелдеудің осы тәсілімен сендер 1.3.2-баптағы теореманы дәлелдеу барысында таныстыңдар. Енді бұл тәсілдің мәні мен мағынасын жете түсініп алайық.

Кіріспеде айтылғандай, өрбір теореманы символ арқылы былай жазуға болады: $A \Rightarrow B$. Мұнда A – берілген сөйлем, яғни *теореманың шарты*, ал B – *теореманың қорытындысы*. B сөйлеміне қарама-қарсы мағынадағы сөйлемді $\neg B$ деп белгілейік.

Қарсы жорып дәлелдеу тәсілінің мағынасы мынадай: теореманың шарты, яғни A сөйлемі орындалады деп алып, оның қорытындысы (салдары) ретінде B сөйлемі емес, оған қарама-қарсы мағынадағы $\neg B$ сөйлемі орындалады, яғни $A \Rightarrow \neg B$ тұжырымы орындалады деп қабылдаймыз.

Содан соң, аксиомалар мен дәлелденген теоремаларға сүйене отырып, теореманың A шартына немесе қандай да

бір аксиомаға немесе дәлелденген тұжырымға (теоремаға) қайшы тұжырымға келеміз.

Жалпы қарама-қарсы пікірлердің екеуі де ақиқат бола алмайтыны белгілі, яғни B және $\neg B$ сөйлемдерінің тек біреуі ғана ақиқат болады. Сондықтан алынған қайшылық $A \Rightarrow \neg B$ тұжырымы орындалады деген жоруымызды теріске шығарып, берілген $A \Rightarrow B$ теоремасының ақиқаттығын көрсетеді.

Мысал. 27-беттегі дәлелденген 4-теореманың:

- шарты A : « a түзуі және оның бойында жататын A нүктесі берілген».
- қорытындысы B : « A нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр тек бір ғана түзу жүргізуге болады».

Сонымен, бұл тұжырымды қысқаша былай жазамыз: $A \Rightarrow B$.

Енді B сөйлеміне қарама-қарсы мағынадағы $\neg B$ сөйлемін тұжырымдайық. A нүктесі арқылы a түзуіне кем дегенде екі перпендикуляр түзу өтеді деп, қарсы жорыық. Бірақ бұл « a түзуінің бір жақ жарты жазықтығында градустық өлшемі 90° -қа тең бір ғана бұрыш өлшеп салуға болады» деген тұжырымға қайшы, яғни $A \Rightarrow \neg B$ тұжырымы қате. $A \Rightarrow B$ теоремасы дәлелденді.



1. Қандай бұрыштарды сыбайлас бұрыштар деп атайды?
2. Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең екенін дәлелдендер.
3. Егер екі бұрыш тең болса, онда олармен сыбайлас бұрыштар да тең болатынын дәлелдендер.
4. Қандай бұрышты тікбұрыш (сүйір, доғал) деп атайды?
5. Тікбұрышпен сыбайлас бұрыш тік болатынын көрсетіндер.
6. Қандай бұрыштарды вертикаль бұрыштар деп атайды?
7. Вертикаль бұрыштардың тең болатынын дәлелдендер.
8. Қандай түзулерді перпендикуляр түзулер деп атайды? Түзулердің перпендикулярлығын қандай белгімен белгілейді?
9. Түзуге түсірілген перпендикуляр деп нені айтады?
10. Бұрыш биссектрисасы деген не?
11. Қарсы жорып дәлелдеу тәсілінің мағынасы қандай? Мысал келтіріңдер.

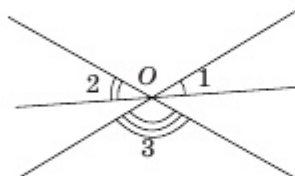


1. Сүйір, тік және доғал бұрыштарды салыңдар. Олардың әрқайсысымен сыбайлас бұрыштарды салыңдар.
2. 70° -қа тең бұрыш салыңдар. Транспортирді пайдаланып, оның биссектрисасын жүргізіңдер.

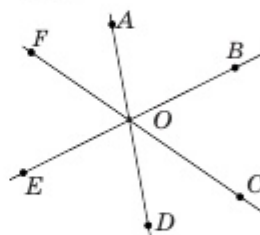
Жаттығулар

А

- 1.47. 30° ; 45° ; 60° ; 90° -қа тең бұрыштармен сыбайлас бұрыштардың шамасын табыңдар.
- 1.48. Сыбайлас бұрыштардың екеуі де: 1) сүйір; 2) доғал; 3) тік болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 1.49. Біреуі екіншісінен 2 есе үлкен болатын сыбайлас бұрыштарды табыңдар.
- 1.50. 1) Біреуі екіншісінен 30° үлкен; 2) айырмасы 40° -қа тең; 3) біреуі екіншісінен 3 есе кіші; 4) өзара тең болатын сыбайлас бұрыштарды табыңдар.
- 1.51. Егер: 1) $\angle ABC = 111^\circ$; 2) $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle ABC = 15^\circ$ болса, онда ABC бұрышымен сыбайлас бұрышты табыңдар.
- 1.52. 1.36-суретте үш түзу O нүктесінде қиылысқан. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ қосындысын табыңдар.
- 1.53. 1.37-суретте $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle FOE = 70^\circ$. AOC , BOD , COE және COD бұрыштарын табыңдар.

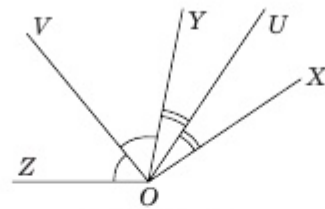


1.36-сурет



1.37-сурет

- 1.54. Егер екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың біреуі тік болса, онда қалған үш бұрыш та тік болатынын дәлелдеңдер.

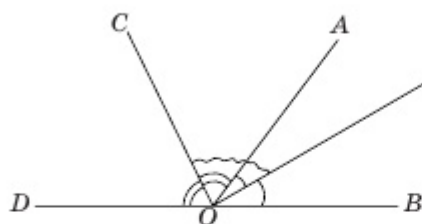


1.38-сурет

- 1.55. 1.38-суретте OV сәулесі – ZOY бұрышының, ал OU сәулесі – XOY бұрышының биссектрисасы. $\angle UOV = 80^\circ$. XOZ бұрышын табыңдар.
- 1.56. p сәулесі – жазыңқы емес (ab) бұрышының биссектрисасы. (ap) бұрышы доғал немесе тік болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 1.57. Егер екі түзу қиылысқанда пайда болатын үш бұрыштың қосындысы 270° -қа тең болса, бұл бұрыштардың шамасы қандай?
- 1.58. Егер екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың үшеуі өзара тең болса, онда бұл түзулер өзара перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

В

- 1.59. Егер сыбайлас бұрыштардың қатынасы: 1) 2:3; 2) 3:7; 3) 11:25; 4) 22:23 қатынасындай болса, осы сыбайлас бұрыштарды табыңдар.
- 1.60. Егер бір бұрышпен сыбайлас екі бұрыштың қосындысы 100° -қа тең болса, онда бұл бұрыштың шамасы неше градус болады?
- 1.61. Екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың екеуінің қосындысы 50° -қа тең. Осы бұрыштарды табыңдар.
- 1.62. Екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың бірі екіншісінен 4 есе үлкен. Осы бұрыштарды табыңдар.
- 1.63. Екі түзу қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың бірі екіншісінен 50° кіші. Осы бұрыштарды табыңдар.



1.39-сурет

1.64. Сыбайлас бұрыштардың биссектрисаларының арасындағы бұрышты табыңдар (1.39-сурет).

1.65. Вертикаль бұрыштардың биссектрисалары бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

1.66. Бұрыш биссектрисасы мен оның бір қабырғасының созындысы арасындағы бұрышты табыңдар. Берілген бұрыш шамасы: 1) 50° ; 2) 90° ; 3) 150° .

C

1.67. $\angle AOB = 35^\circ$, $\angle BOC = 50^\circ$. $\angle AOC$ бұрышын табыңдар. Өрбір мүмкін жағдай үшін сызбасын салыңдар.

1.68. $\angle(ab) = 120^\circ$, $\angle(ac) = 30^\circ$. $\angle(bc)$ бұрышын табыңдар. Өрбір мүмкін жағдай үшін сызбасын салыңдар.

1.69. Егер сәуле бұрыш төбесінен басталып, оның қабырғаларымен тең сүйір бұрыштар жасайтын болса, онда бұл сәуле осы бұрыштың биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.

1.70. Егер ABC және CBD бұрыштарының биссектрисалары өзара перпендикуляр болса, онда A , B , D нүктелері бір түзу бойында жататынын дәлелдеңдер.

1.71. Бастапқы нүктелері ортақ a , b , c сәулелері берілген. Егер $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 120^\circ$ болса, онда:

1) осы сәулелердің бірі өзге екі сәулемен шектелетін бұрыштың ішкі сәулесі бола ма?

2) бастапқы нүкте арқылы өтпейтін түзу осы үш сәуленің бәрін қиып өтуі мүмкін бе?

Жауаптарыңды негіздеңдер.

1.72. $\triangle ABC = \triangle PQR$, $\angle R = 55^\circ$ және $AB = 12$ см.

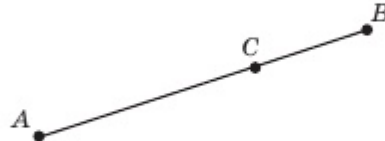
1) $\angle C$ мен PQ -ды табыңдар.

2) ABC үшбұрышының периметрі PQR үшбұрышы периметрінен 6 см артық болуы мүмкін бе?

Жауаптарыңды негіздеңдер.

**«ПЛАНИМЕТРИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ТҮСІНІКТЕРІ
МЕН АКСИОМАЛАРЫ» БӨЛІМІ БОЙЫНША
ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР**

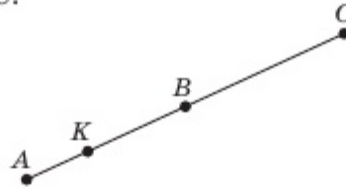
1. Берілгені: $AB = 24$ см, AC BC -дан 8 см ұзын.
Табу керек: BC .



2. Берілгені: $CP = 32$ см, CE EP -дан 10 см қысқа.
Табу керек: EP .



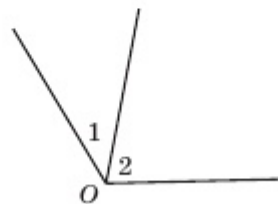
3. Берілгені: $KB = 33$ см, B нүктесі AC кесіндісін тең екі бөлікке бөледі. $AK : KB = 1 : 3$
Табу керек: AC .



4. Берілгені: MN кесіндісінің бойынан L нүктесі алынған.
 ML және LN кесінділерінің орта нүктелері арасындағы қашықтық MN кесіндісі ұзындығының жартысына тең екенін дәлелдеңдер. Суретті аяқтап салыңдар.

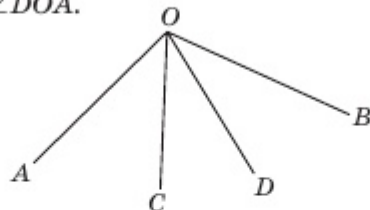


5. Берілгені: $\angle O = 120^\circ$. $\angle 1$ -тың $\angle 2$ -қа қатынасы $2 : 3$ -ке қатынасындай.
Табу керек: $\angle 1, \angle 2$.



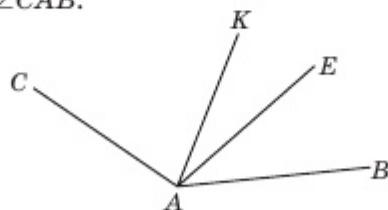
6. Берілгені: $\angle AOB = 123^\circ$, $\angle BOC = 83^\circ$, $\angle DOB = 49^\circ$.

Табу керек: $\angle DOA$.

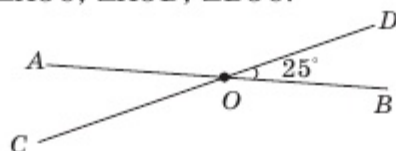


7. Берілгені: AK – $\angle CAB$ -ның биссектрисасы, AE – $\angle KAB$ -ның биссектрисасы. $\angle CAE = 105^\circ$.

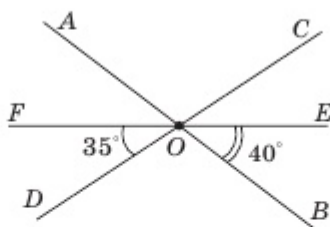
Табу керек: $\angle CAB$.



8. Табу керек: $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle BOC$.

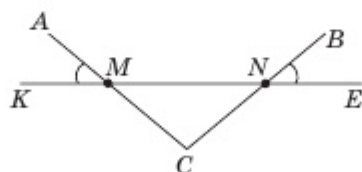


9. Табу керек: $\angle AOC$.



10. Берілгені: $\angle KMA = \angle ENB$.

Дәлелдеу керек: $\angle CMN + \angle BNM = 180^\circ$.



Терминдер сөздігі

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Аксиома	Аксиома	Axiom
Планимертия	Планиметрия	Planimetry
Стереометрия	Стереометрия	Stereometry
Теорема	Теорема	Theorem
Анықтама	Определение	Definition
Нүкте	Точка	Point
Түзу	Прямая	Line
Кесінді	Отрезок	Segment
Кесінді ұштары	Концы отрезка	Endpoints of a segment
Кесіндінің ішкі нүктесі	Внутренняя точка отрезка	Interior point of a segment
Сәуле (жарты түзу)	Луч (полупрямая)	Ray (half-line)
Жарты жазықтық	Полуплоскость	Half-plane
Сәуленің бастапқы нүктесі	Начальная точка луча	Starting point of a ray
Толықтауыш сәуле	Дополнительный луч	Supplementary ray
Бұрыш	Угол	Angle
Бұрыш төбесі	Вершина угла	Vertex of an angle
Бұрыш қабырғасы	Сторона угла	Side of an angle
Жазық (жазыңқы) бұрыш	Развернутый угол	Straight angle
Тікбұрыш	Прямой угол	Right angle
Бұрыштың ішкі нүктесі	Внутренняя точка угла	Interior point of an angle
Бұрыштың сыртқы нүктесі	Внешняя точка угла	Exterior point of an angle
Сыбайлас бұрыштар	Смежные углы	Adjacent angles
Вертикаль бұрыштар	Вертикальные углы	Vertical angles
Сүйір бұрыш	Острый угол	Acute angle
Доғал бұрыш	Тупой угол	Obtuse angle
Перпендикуляр	Перпендикуляр	Perpendicular
Перпендикуляр табаны	Основание перпендикуляра	Base of a perpendicular

2. ҮШБҰРЫШТАР

2.1. Үшбұрыш және берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың табылуы

2.1.1. Үшбұрыш. Дәптерге бір түзу бойында жатпайтын үш нүкте белгілеп, оларды кесінділермен қосамыз (2.1-сурет). Шыққан геометриялық фигураны **үшбұрыш** дейміз. Берілген үш нүкте **үшбұрыштың төбелері** деп, ал оларды қосатын кесінділер **үшбұрыштың қабырғалары** деп аталады, 2.1-суреттегі A , B , C нүктелері – үшбұрыштың төбелері, ал AB , AC , BC кесінділері – оның қабырғалары. Бұл үшбұрышты былай белгілейді: $\triangle ABC$.

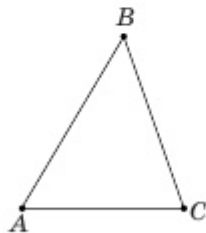
$\angle BAC$, $\angle CBA$ және $\angle ACB$ **үшбұрыштың бұрыштары** деп аталады. Кейде $\triangle ABC$ -ның бұрыштарын бір әріппен белгілейді: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Үшбұрыштың үш қабырғасы ұзындықтарының қосындысын **үшбұрыштың периметрі** деп атайды. A бұрышын BC қабырғасына **қарсы бұрыш** деп атайды. Осы сияқты $\angle B$ – AC қабырғасына, $\angle C$ – AB қабырғасына қарсы орналасқан.

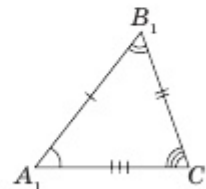
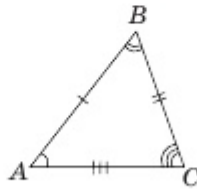
Төбелері үшбұрыштың бір қабырғасының ұштарында орналасқан бұрыштарды осы қабырғаға **іргелес бұрыштар** дейді. 2.1-суретте A және B бұрыштары AB қабырғасына іргелес орналасқан.

Егер екі кесіндінің ұзындықтары бірдей болса, онда бұл кесінділерді **тең кесінділер** деп атайды. Екі бұрыштың градустық өлшемдері бірдей болса, онда бұл бұрыштарды **тең бұрыштар** деп атайды.

Екі үшбұрыштың сәйкес қабырғалары мен сәйкес бұрыштары өзара тең болса, мұндай үшбұрыштарды **тең үшбұрыштар** деп атайды. Мұнда тең бұрыштар сәйкес тең қабырғаларға қарсы жатуы тиіс. 2.2-суретте өзара тең ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары бейнеленген:



2.1-сурет



2.2-сурет

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

Үшбұрыштар теңдігін былай белгілейді: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Мұнда үшбұрыш төбелерінің жазылу тәртібі маңызды.

Мысалы, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ теңдігінен $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ болатындығы шығады, ал $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ теңдігінен $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ теңдіктерін аламыз.

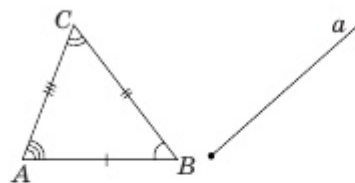
1-мысал. $\triangle ABC = \triangle PQR$, $AB = 10$ см және $\angle C = 90^\circ$. PQ мен $\angle R$ -ын анықтайық.

Шешуі. $\triangle ABC = \triangle PQR$ болғандықтан, $AB = PQ$ және $\angle C = \angle R$ болады. Олай болса, $PQ = 10$ см, $\angle R = 90^\circ$.

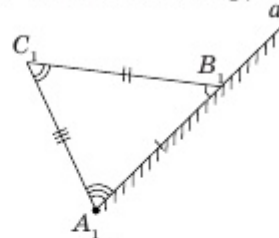
2.1.2. Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың табылуы

Айталық, $\triangle ABC$ мен a сәулесі берілген (2.3-сурет). Үшбұрыштың A төбесі a сәулесінің бастапқы нүктесімен беттесетіндей, B төбесі a сәулесінде жататындай және C төбесі a сәулесі мен оның толықтауыш сәулесіне қатысты берілген жарты жазықтықта жататындай етіп, ABC үшбұрышын жылжытамыз. Жылжыған үшбұрыш төбелерін A_1 , B_1 , C_1 деп белгілейік (2.4-сурет). Онда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Мұнда ABC үшбұрышы $A_1B_1C_1$ үшбұрышымен жылжыту (қозғалыс) арқылы *беттеседі*.

Жалпы қозғалыс арқылы тең кесінділерді де, тең бұрыштарды да беттестіруге болады (VI және VII аксиомалар).



2.3-сурет



2.4-сурет

Берілген ABC үшбұрышына тең болатын және a сәулесіне қатысты көрсетілген тәртіппен орналасатын $A_1B_1C_1$ үшбұрышының табылуын төмендегі *аксиома* айқындайды.

VIII. Берілген сәулеге қатысты көрсетілген тәртіпте орналасатын және кез келген берілген үшбұрышқа тең үшбұрыш табылады.



1. Үшбұрыш деген не?
2. Үшбұрыштың бұрышы деген не?
3. Қандай кесінділер тең деп аталады?
4. Қандай бұрыштар тең деп аталады?
5. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ теңдігі нені білдіреді?

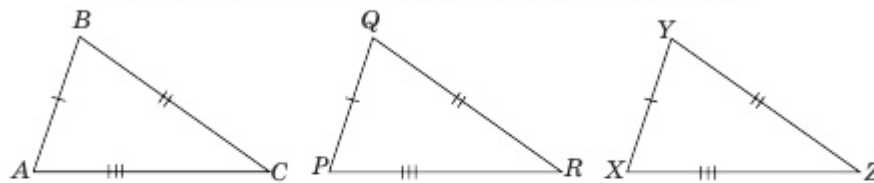


Көз мөлшерімен өзара тең екі үшбұрыш салып, олардың теңдігін өлшеу құралдарымен тексеріңдер.

Жаттығулар

А

- 2.1. Үшбұрыштың AB қабырғасы бойынан D нүктесі алынған. Егер $AD = 5$ см, ал $BD = 6$ см болса, онда AB -ні табыңдар.
- 2.2. $\triangle ABC = \triangle PQR$, $AB = 5$ см, $BC = 6$ см және $AC = 7$ см. PQR үшбұрышының қабырғаларын табыңдар.
- 2.3. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle A_1 = 40^\circ$, $\angle B_1 = 60^\circ$ және $\angle C_1 = 80^\circ$. ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.
- 2.4. ABC , PQR және XYZ үшбұрыштары тең. $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $XZ = 7$ см болса, онда әрбір үшбұрыштың белгісіз қабырғаларын табыңдар (2.5-сурет).



2.5-сурет

- 2.5. $\triangle ABC = \triangle MNP$. 1) Егер $NP = 12$ см, ал $\angle P = 12^\circ 1'$ болса, онда BC қабырғасы мен C бұрышын табыңдар; 2) Егер MNP үшбұрышының қабырғалары өртүрлі болса, онда ABC үшбұрышының AB және BC қабырғалары тең болуы мүмкін бе?
- 2.6. $\triangle ABC = \triangle QPT$ және $\angle B = 17^\circ 35'$, $QT = 23$ см.
1) Егер QPT үшбұрышының тең емес екі бұрышы бар

болса, онда ABC үшбұрышының барлық бұрыштары тең болуы мүмкін бе?

2) AC қабырғасы мен P бұрышын табыңдар.

В

2.7. ABC үшбұрышы берілген. Оған тең ABD үшбұрышы табыла ма?

2.8. Үшбұрыштың бірде-бір төбесі арқылы өтпейтін түзу оның барлық қабырғаларын қиып өтуі мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

2.9. $\triangle ABC = \triangle SKT$ және $AB = 17$ дм, $\angle K = 70^\circ 18'$. 1) B бұрышы мен SK қабырғасын табыңдар; 2) SKT үшбұрышының периметрі ABC үшбұрышының периметрінен үлкен болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

2.10. $\triangle ABC = \triangle SKT$ және $\angle B = 121^\circ 15'$, $ST = 16$ дм. 1) K бұрышы мен AC қабырғасын табыңдар; 2) Осы үшбұрыштардың периметрлерінің қатынасы 2-ге тең болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

С

2.11. ABC үшбұрышы және $B_1 \in AC$, $A_1 \in BC$ нүктелері берілген. AA_1 және BB_1 кесінділері қиылысатынын дәлелдеңдер.

2.12. $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ және $\angle B = 15^\circ$, $B_1C_1 = 5$ м. 1) A_1 бұрышы мен AC қабырғасын табыңдар; 2) Егер $AB = BC$ болса, онда $B_1A_1C_1$ үшбұрышының периметрі $2A_1B_1 + AC$ қосындысынан үлкен болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

2.13. $\triangle ABC = \triangle C_1A_1B_1$ және $\angle B_1 = 60^\circ$, $BC = 8$ м. 1) C бұрышы мен B_1A_1 қабырғасын табыңдар; 2) Егер ABC үшбұрышының барлық қабырғалары өзара тең болса, онда оның периметрі $2AC + 3B_1C_1$ қосындысына тең болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

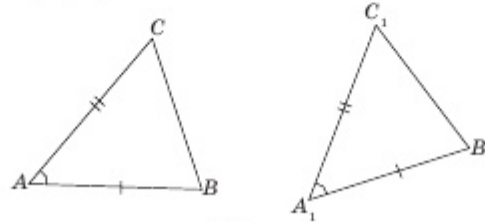
2.2. Үшбұрыштар теңдігінің белгілері

2.2.1. Үшбұрыштар теңдігінің бірінші (I) белгісі

Теорема 1. Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкес екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ және $\angle A = \angle A_1$ болатындай ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілген (2.6-сурет).

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдейік.



2.6-сурет

Дәлелдеуі. $\angle A = \angle A_1$ болғандықтан, A_1 төбесі A төбесімен, ал A_1B_1 және A_1C_1 қабырғалары сәйкес AB және AC сәулелерінде жататындай етіп, $C_1A_1B_1$ бұрышын CAB бұрышына беттестіруге болады.

Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың бар болатыны жөніндегі VIII аксиома бойынша мұндай үйлестіру мүмкін және ол бір ғана түрде анықталады.

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ болғандықтан, A_1B_1 қабырғасы AB қабырғасымен және A_1C_1 қабырғасы AC қабырғасымен беттеседі, яғни B_1 және B , C_1 және C нүктелері беттеседі.

Демек, B_1C_1 BC қабырғалары да беттеседі. Олай болса, $A_1B_1C_1$ және ABC үшбұрыштары толық беттеседі. Онда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ■

2.2.2. Үшбұрыштар теңдігінің екінші (II) белгісі

Теорема 2. Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкес қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ және $\angle B = \angle B_1$ болатындай ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілсін. $\triangle ABC$ және $\triangle A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдейік (2.7-сурет).

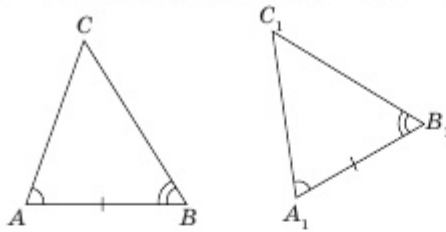
Дәлелдеуі. $\angle A = \angle A_1$ болғандықтан, A_1 төбесі A төбесімен беттесетіндей және A_1B_1 қабырғасы AB сәулесінде жататындай етіп, AB түзуіне қатысты C және C_1 төбелері бір жарты жазықтықта жататындай етіп, $A_1B_1C_1$ үшбұрышын ABC үшбұрышымен беттестіреміз.

$AB = A_1B_1$ болғандықтан, B_1 төбесі B төбесімен беттеседі. $\angle A = \angle A_1$ және $\angle B = \angle B_1$ болғандықтан, A_1C_1 сәулесі AC сәулесімен, ал B_1C_1 сәулесі BC сәулесімен беттеседі. Онда C_1 төбесі C төбесімен беттеседі.

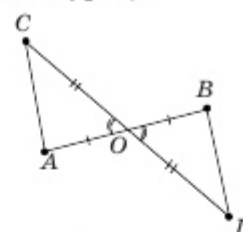
Сонымен, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары толық беттеседі, яғни $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ■

1-мысал. AB және CD кесінділері әрқайсысының ортасы болатын O нүктесінде қиылысады. $AC = 10$ м. BD -ні табайық.

Шешуі. $\angle AOC = \angle BOD$ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\triangle AOC = \triangle BOD$, себебі $AO = BO$, $CO = DO$. Сондықтан $BD = AC = 10$ м (2.8-сурет).



2.7-сурет



2.8-сурет



1. Үшбұрыштар теңдігінің I белгісін дәлелдеңдер. Дәлелдеуде қай аксиомалар қолданылады?
2. Үшбұрыштар теңдігінің II белгісін дәлелдеңдер.
3. Бір үшбұрыштың периметрі екіншісінің периметрінен үлкен. Осы үшбұрыштар тең болуы мүмкін бе?



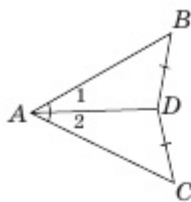
Транспортир мен сызғышты пайдаланып:

1. 1) $AB = 4,3$ см, $AC = 2,3$ см, $\angle A = 23^\circ$; 2) $BC = 9$ см, $AB = 6,2$ см, $\angle B = 122^\circ$; 3) $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 90^\circ$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.
2. $AB = 5$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ болатындай ABC үшбұрышын салыңдар.

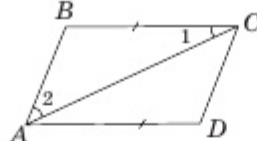
Жаттығулар

А

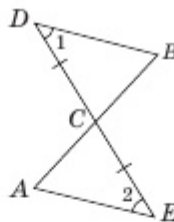
- 2.14.** AE және CD кесінділері әрқайсысының ортасы болатын B нүктесінде қиылысады. 1) $\triangle ABC = \triangle EBD$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) $\angle D = 47^\circ$, $\angle E = 42^\circ$ болса, онда A және C бұрыштарын табыңдар.
- 2.15.** 2.9-суретте $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. 1) $\triangle ABD = \triangle ACD$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) егер $AC = 15$ см, $DC = 5$ см болса, BD мен AB -ні табыңдар.
- 2.16.** 2.10-суретте $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. 1) $\triangle ABC = \triangle CDA$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) Егер $AD = 17$ см, $DC = 14$ см болса, онда AB мен BC -ні табыңдар.
- 2.17.** 1) 2.11-суретте $\angle 1 = \angle 2$ және $DC = CE$. $BC = AC$ теңдігін дәлелдеңдер. 2) 2.12-суретте $\triangle ADB = \triangle CBD$. $AB = CD$, $AD = BC$ теңдіктерін дәлелдеңдер.



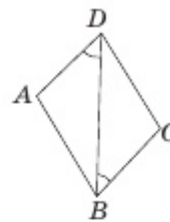
2.9-сурет



2.10-сурет

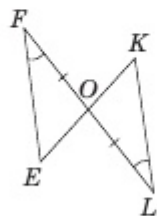


2.11-сурет

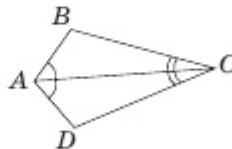


2.12-сурет

- 2.18.** 1) 2.13-суретте $FO = OL$, $\angle EFO = \angle OLK$. $FE = KL$ теңдігін дәлелдеңдер. 2) 2.14-суретте $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ACB = \angle ACD$. $AB = AD$ теңдігін дәлелдеңдер.



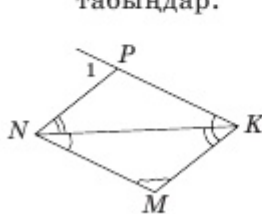
2.13-сурет



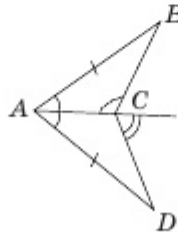
2.14-сурет

В

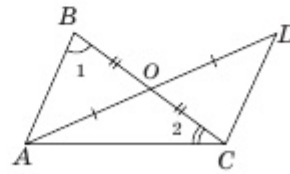
- 2.19. 2.15-суретте $\angle MNK = \angle PKN$, $\angle PNK = \angle MKN$, $\angle NMK = 137^\circ$. NP бұрышына сыбайлас $\angle 1$ -тың шамасын табыңдар.
- 2.20. 2.16-суретте $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ACB = 121^\circ$. $\angle 1$ -тың шамасын табыңдар.
- 2.21. 2.17-суретте $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74^\circ$, $\angle 2 = 36^\circ$.
1) $\triangle AOB = \triangle DOC$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) $\triangle ACD$ бұрышын табыңдар.



2.15-сурет



2.16-сурет



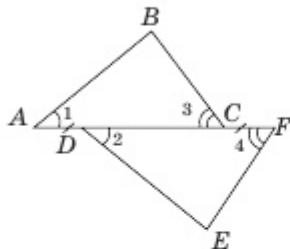
2.17-сурет

- 2.22. AC және BD кесінділері қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. $\triangle ABC = \triangle CDA$ теңдігін дәлелдеңдер.
- 2.23. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. AB және A_1B_1 қабырғаларынан $AP = A_1P_1$ болатындай P және P_1 нүктелері алынған. $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$ теңдігін дәлелдеңдер.
- 2.24. ACD үшбұрышында $AC = AD$ және $\angle ACD = \angle ADC$. Үшбұрыш қабырғаларынан $AB = AE$ болатындай етіп, $B \in AC$ және $E \in AD$ нүктелері алынған. $\angle CBD = \angle DEC$ теңдігін дәлелдеңдер.
- 2.25. AB кесіндісінің ұштарынан $\angle ABD = \angle BAC$ болатындай AC және BD түзулері жүргізілген, ал AB -нің ортасы O арқылы өтетін түзу бұл параллель түзулерді C және D нүктелерінде қиып өтеді. Егер $BD = 8$ см болса, AC -ні табыңдар.
- 2.26. AB мен CD кесінділері $AO = OC$, $BO = OD$ теңдіктері орындалатындай O нүктесінде қиылысады. $\angle ABD = \angle BDC$ теңдігін дәлелдеңдер.

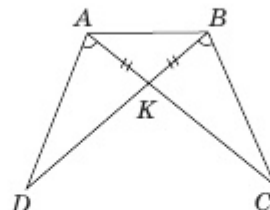
- 2.27. Ұзындықтары бірдей AB және CD кесінділері $AO = OD$ болатындай O нүктесінде қиылысады. $\triangle ABC = \triangle DCB$ теңдігін дәлелдеңдер.

С

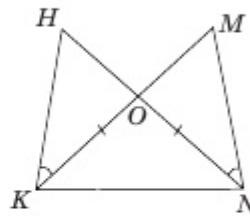
- 2.28. 2.18-суретте $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$ және $\angle 3 = \angle 4$. $\triangle ABC = \triangle DEF$ теңдігін дәлелдеңдер.
- 2.29. Ұзындықтары бірдей AB және CD кесінділері $AO = OC$ болатындай етіп, O нүктесінде қиылысады. $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$ теңдіктерін дәлелдеңдер.
- 2.30. 1) 2.19-суретте $\angle DAC = \angle DBC$, $AK = KB$. $\angle DAB = \angle CBA$ теңдігін дәлелдеңдер. 2) C және D нүктелері AB түзуіне қатысты өртүрлі жарты жазықтықтарда $\angle ABC = \angle ABD$, $BD = BC$ теңдіктері орындалатындай етіп орналасқан. AB сәулесі DAC бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.
- 2.31. 1) 2.20-суретте $\angle HKM = \angle MNH$, $KO = ON$. $\angle HKN = \angle KNM$ теңдігін дәлелдеңдер. 2) $OM = PE$, $\angle MPO = \angle POE$ теңдіктері орындалатындай OP түзуіне қатысты өртүрлі жарты жазықтықтарда M және E нүктелері орналасқан. $\angle MOE = \angle EPM$ және $\triangle MPE = \triangle EOM$ теңдіктерін дәлелдеңдер.



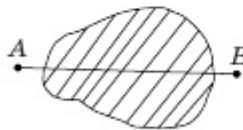
2.18-сурет



2.19-сурет

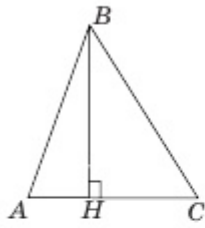


2.20-сурет

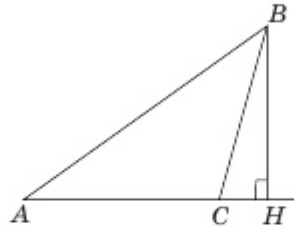


2.21-сурет

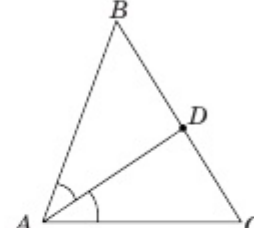
- 2.32. Түзу сызық бойымен жете алмайтындай A және B нүктелерінің арақашықтығын қалай табуға болады (2.21-сурет)? (Үшбұрыштар теңдігінің I және II белгілерін қолданыңдар.)



2.22-сурет



2.23-сурет



2.24-сурет

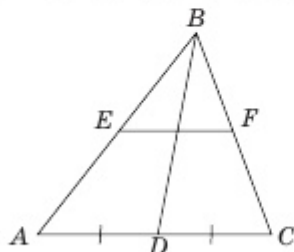
2.2.3. Үшбұрыштың биіктігі, биссектрисасы, медианасы және орта сызығы. *Үшбұрыштың биіктігі* деп оның төбесінен қарсы жатқан қабырғасы арқылы өтетін түзуге түсірілген перпендикулярды айтады. 2.22-суретте ABC үшбұрышының BH биіктігінің H табаны оның AC қабырғасында жатыр. Ал 2.23-суретте биіктіктің H табаны AC қабырғасының созындысында жатыр.

Үшбұрыштың берілген төбесінен жүргізілген *биссектрисасы* деп осы төбесіндегі бұрыш биссектрисасының қарсы жатқан қабырғасымен шектелетін кесіндісін айтады. AD – $\angle BAC$ -ның биссектрисасы (2.24-сурет).

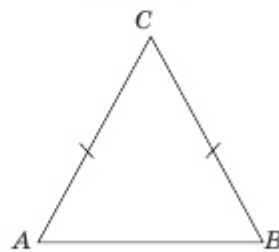
Үшбұрыштың берілген төбесінен жүргізілген *медианасы* деп осы төбесінен қарсы жатқан қабырғасының ортасымен қосатын кесіндіні айтады. BD – $\triangle ABC$ -ның медианасы (2.25-сурет).

Үшбұрыштың екі қабырғасының орталарын қосатын кесіндіні *үшбұрыштың орта сызығы* деп атайды EF – $\triangle ABC$ -ның орта сызығы (2.25-сурет).

2.2.4. Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеттері. Кері теорема ұғымы. Екі қабырғасы тең үшбұрышты *теңбүйірлі үшбұрыш* деп атайды. Тең қабырғаларын үшбұрыштың бүйір қабырғалары деп, ал үшінші қабырғасын оның табаны деп атайды. 2.26-суретте ABC теңбүйірлі үшбұрышы бейнеленген: $AC = BC$ – бүйір қабырғалары, AB – табаны.

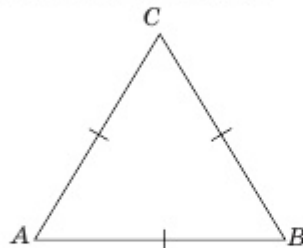


2.25-сурет

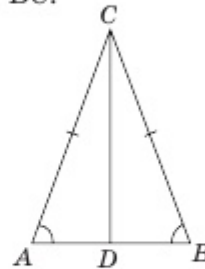


2.26-сурет

Барлық қабырғалары тең үшбұрышты **тең қабырғалы үшбұрыш** деп атайды. 2.27-суретте ABC тең қабырғалы үшбұрышы бейнеленген: $AB = AC = BC$.



2.27-сурет



2.28-сурет

Теорема 3. Теңбүйірлі үшбұрыштың төбесінен табанына жүргізілген биссектрисасы оның әрі медианасы, әрі биіктігі болады.

CD кесіндісі табаны AB болатын ABC теңбүйірлі үшбұрышының C төбесінен жүргізілген биссектрисасы болсын (2.28-сурет). CD кесіндісі осы үшбұрыштың әрі медианасы, әрі биіктігі болатынын көрсету керек.

Дәлелдеуі. CD биссектриса болғандықтан, $\angle ACD = \angle BCD$, ал ABC теңбүйірлі үшбұрыш болғандықтан, $AC = BC$.

CD – ACD және BCD үшбұрыштарына ортақ қабырға. Олай болса, үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\triangle ACD = \triangle BCD$. Сондықтан $AD = BD$, яғни CD – медиана және $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$, яғни сыбайлас бұрыштар теңдігінен $CD \perp AB$ екенін аламыз. Онда CD әрі биіктік болады. ■

Теорема 4.

- 1) Егер үшбұрыш теңбүйірлі болса, онда бұл үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең болады.
- 2) Керісінше, егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, онда бұл үшбұрыш теңбүйірлі болады.

1 ABC – теңбүйірлі үшбұрыш болсын: $AC = BC$. $\angle A = \angle B$ теңдігін дәлелдейік (2.28-сурет).

Дәлелдеуі. C төбесінен жүргізілген CD биссектрисасын қарастырайық. Онда 3-теореманың дәлелдеуінде көрсетілген $\triangle ACD = \triangle BCD$ теңдігінен $\angle A = \angle B$ теңдігі шығады.

2 ABC үшбұрышында $\angle A = \angle B$ болсын. $\triangle ABC$ -ның теңбүйірлі екенін дәлелдейік (2.28-сурет).

Дәлелдеуі. $\triangle ABC$ мен $\triangle BAC$ -ын қарастырайық (мұнда үшбұрыш төбелерінің жазылу реті өзгеше екені ескерілген).

Үшбұрыштар теңдігінің II белгісі бойынша $\triangle ABC = \triangle BAC$, себебі $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$ (есеп шарты бойынша), $AB = BA$ (ортақ қабырға). Үшбұрыштар тең болғандықтан, олардың сәйкес қабырғалары тең: $AC = BC$. Олай болса, ABC – теңбүйірлі үшбұрыш. ■

4-теорема 1) және 2) екі теоремадан (тұжырымнан) құралған. 2)-теорема 1)-теоремаға **кері теорема** болып табылады. Оның мәнін былай ұғыну қажет: 1)-теореманың шарты («үшбұрыш теңбүйірлі») – 2)-теореманың қорытындысы, ал 2)-теореманың шарты («үшбұрыштың екі бұрышы тең» немесе «үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең») – 1)-теореманың қорытындысы.

Басқаша айтқанда, A арқылы «үшбұрыш теңбүйірлі» деген тұжырымды, ал B арқылы «үшбұрыштың екі бұрышы тең» дегенді немесе «үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең» деген тұжырымды белгілейік.

1)-теореманы қисынды салдар белгілеуімен $A \Rightarrow B$ түрінде, ал 2)-теореманы $B \Rightarrow A$ түрінде жазуға болады.

Көп жағдайда бұл өзара кері екі теореманы біріктіріп, былай жазады: $A \Leftrightarrow B$. *Оқылуы:* «**Үшбұрыш теңбүйірлі болуы үшін оның екі бұрышы тең болуы қажетті және жеткілікті**».

Жалпы кез келген теоремаға кері теорема орындала бермейді.

Мысалы, мынадай теореманы қарастырайық: «Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең». Бұған кері тұжырым былай жазылады: «Қосындысы 180° -қа тең бұрыштар сыбайлас бұрыштар болады».

Соңғы тұжырым (Қосындысы 180° -қа тең бұрыштар сыбайлас бұрыштар болады) дұрыс емес. Өйткені қосындысы 180° -қа тең бұрыштардың барлығы сыбайлас бұрыштар бола бермейді.

Бұрыштар сыбайлас болуы үшін олардың міндетті түрде ортақ төбесі және ортақ қабырғасы болуы қажет.

2-мысал. Тең қабырғалы үшбұрыштың барлық бұрыштары тең болатынын көрсетейік.

Шешуі. $\triangle ABC$ тең қабырғалы үшбұрыш болсын: $AB = AC = BC$. Осыдан $AB = AC$ теңдігі бойынша $\triangle ABC$ теңбүйірлі болады. Онда 4-теорема бойынша $\angle B = \angle C$. Ал $AB = BC$ теңдігінен осы сияқты $\angle A = \angle C$ болатыны шығады. Олай болса, $\angle A = \angle B = \angle C$ (2.27-сурет).

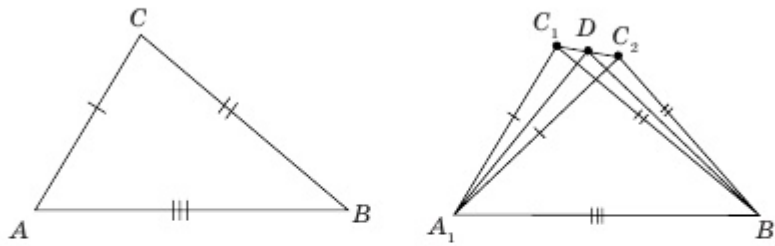
2.2.5. Үшбұрыштар теңдігінің үшінші (III) белгісі

Теорема 5. Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкес үш қабырғасына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.

ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ теңдіктері орындалсын. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Қарсы жорып, $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$ делік, яғни $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$ болуы керек. Бұлай болмаған жағдайда, үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ болар еді.

Айталық, $A_1B_1C_2$ үшбұрышы ABC үшбұрышына тең болсын және C_1 мен C_2 нүктелері A_1B_1 түзуінің бір жақ бөлігінде орналассын (2.29-сурет).



2.29-сурет

D нүктесі C_1C_2 кесіндісінің ортасы болсын, онда $A_1C_1C_2$ және $B_1C_1C_2$ үшбұрыштары – C_1C_2 табаны ортақ болатын теңбүйірлі үшбұрыштар. Себебі $A_1C_1 = AC = A_1C_2$, $B_1C_1 = BC = B_1C_2$. Сондықтан олардың A_1D және B_1D медианалары өрі биіктік болады: $A_1D \perp C_1C_2$, $B_1D \perp C_1C_2$.

Мұнда A_1D және B_1D түзулері беттеспейді, себебі A_1, B_1, D нүктелері бір түзудің бойында жатпайды. Бірақ C_1C_2 түзуіне оның D нүктесінен жалғыз ғана перпендикуляр жүргізуге болады. Бұл қайшылық $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ теңдігі орындалатынын көрсетеді. ■

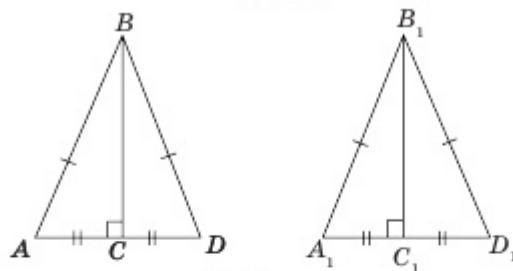
3-мысал. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ болатындай ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары берілген. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ теңдігі орындалатынын көрсетейік.

Шешуі. Айталық, ABC үшбұрышы мен $A_1B_1C_1$ үшбұрышы есеп шарттарын қанағаттандырсын (2.30-сурет).

CBA үшбұрышына тең CBD үшбұрышын және $C_1B_1A_1$ үшбұрышына тең $C_1B_1D_1$ үшбұрышын салайық.

$\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ болғандықтан (оларға сыбайлас бұрыштар да 90° -қа тең), A, C, D және A_1, C_1, D_1 нүктелері сәйкесінше AD және A_1D_1 түзулерінде жатады.

$AB = A_1B_1$ (есеп шарты бойынша) және $AD = AC + CD = 2AC = 2A_1C_1 = A_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1$ және $BD = AB = A_1B_1 = B_1D_1$ болғандықтан (салуымыз бойынша), үшбұрыштар теңдігінің III белгісі бойынша $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$. Олай болса, $\angle A = \angle A_1$. Ал $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Дәлелдеу керегі де осы.



2.30-сурет



1. Қандай үшбұрыш теңбүйірлі үшбұрыш деп аталады? Оның бүйір қабырғалары мен табаны туралы айтыңдар.
2. Қандай үшбұрышты тең қабырғалы деп атайды?
3. Үшбұрыштың биіктігі деген не?
4. Үшбұрыштың биссектрисасы деген не?
5. Үшбұрыштың медианасы деген не?



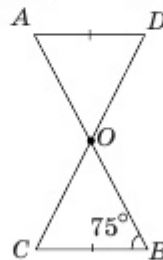
1. Сүйір, тік және доғал бұрышты үшбұрыштар салып, сызғыштың көмегімен оның қабырғаларының орталарын белгілеңдер. Үшбұрыштың медианаларын жүргізіңдер.

2. Сүйір, тік және доғал бұрышты үшбұрыш салыңдар. Транспортирді пайдаланып, үшбұрыштың биссектрисаларын жүргізіңдер.
3. Үш бұрышы да сүйір болатын $\triangle ABC$ -ын, M бұрышы доғал болатын $\triangle MNP$ -ын және N бұрышы тік болатын $\triangle KNP$ -ын салыңдар. Үшбұрышты сызғышты қолданып, әрбір үшбұрыштың биіктіктерін жүргізіңдер.
4. Табанына қарсы жатқан төбесіндегі бұрышы: 1) сүйір; 2) тік; 3) доғал болатындай етіп, теңбүйірлі үш үшбұрыш салыңдар.

Жаттығулар

А

- 2.33. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны 5 см, ал бүйір қабырғасы 6 см. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрін табыңдар.
- 2.34. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 12 см, ал бүйір қабырғасы 5 см. Оның табанын анықтаңдар.
- 2.35. ABC және PQR үшбұрыштарында $AB=PQ$, $AC=PR$ және $BC=QR$. Егер $\angle Q = 50^\circ$ болса, онда $\angle B$ -ын табыңдар.
- 2.36. MNK және PQR үшбұрыштарында $MN=PQ$, $MK=PR$ және $NK=QR$. Егер $\angle M = 60^\circ$ болса, онда P бұрышының сыртқы бұрышын табыңдар.
- 2.37. AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысады. Егер $AD=BC$, $AB=CD$ және $\angle ABC = 75^\circ$ болса, онда ADC бұрышын табыңдар (2.31-сурет).

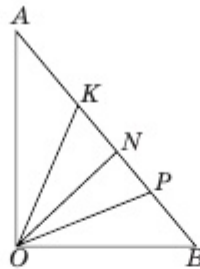


2.31-сурет

- 2.38. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 7,5 м, ал бүйір қабырғасы 2 м. Табанын табыңдар.
- 2.39. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 15,6 м. Егер: 1) табаны бүйір қабырғасынан 3 м кіші; 2) табаны бүйір қабырғасынан 3 м үлкен болса, онда үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.
- 2.40. Тең қабырғалы үшбұрыштың барлық бұрыштары тең екенін дәлелдеңдер.
- 2.41. Табаны BC болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышында $\angle B = 40^\circ$. C бұрышының сыртқы бұрышын табыңдар.

В

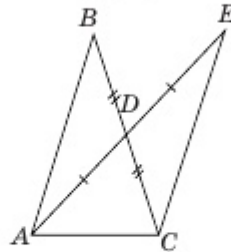
- 2.42. ON кесіндісі – AOB тікбұрышының биссектрисасы, ал OK және OP кесінділері – сәйкес AON және NOB бұрыштарының биссектрисалары. KOP бұрышын табыңдар (2.32-сурет).



2.32-сурет

- 2.43. A және C нүктелері a түзуіне қатысты өртүрлі жарты жазықтықтарда орналасқан және a түзуіне жүргізілген AB және CD перпендикулярлары тең. 1) $\triangle ABD = \triangle CDB$ теңдігін дәлелдеңдер; 2) Егер $\angle ADB = 44^\circ$ болса, онда $\angle ABC$ -ын табыңдар.
- 2.44. ABC үшбұрышының AD медианасының созындысынан $AD = DE$ болатындай E нүктесі алынған және E мен C нүктелері қосылған. 1) $\triangle ABD = \triangle ECD$ теңдігін

дәлелдендер; 2) Егер $\angle ACD = 56^\circ$, $\angle ABD = 40^\circ$ болса, онда $\angle ACE$ -ын табыңдар (2.33-сурет).



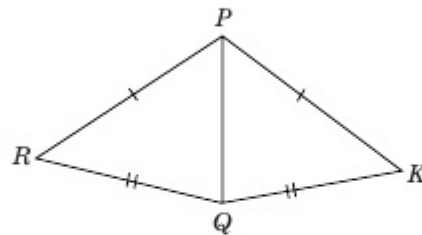
2.33-сурет

- 2.45.** Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны бүйір қабырғасынан екі есе кіші, ал периметрі 50 см. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.
- 2.46.** Табаны BC болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышының периметрі 40 см, ал тең қабырғалы BDC үшбұрышының периметрі 45 см. AB және BC қабырғаларын табыңдар.
- 2.47.** AB кесіндісінің ортасы C арқылы осы кесіндіге перпендикуляр түзу жүргізілген. Осы түзудің әрбір X нүктесінен AB кесіндісінің ұштарына дейінгі қашықтықтар тең болатынын көрсетіңдер.
- 2.48.** AB және PQ кесінділері $AP = AQ$ және $BP = BQ$ теңдіктері орындалатындай етіп қиылысады. AB сәулесі PAQ бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.
- 2.49.** 2.48-есеп шартын пайдаланып, AB және PQ түзулері перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.
- 2.50.** Табаны BC болатын ABC теңбүйірлі үшбұрышында AD медианасының бойынан E нүктесі алынған.
1) AEB және AEC ; 2) BED және CED
үшбұрыштарының теңдігін дәлелдеңдер.
- 2.51.** AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысады. Егер $BO = CO$ және $\angle ACO = \angle DBO$ болса, $\triangle ACO = \triangle DBO$ теңдігін дәлелдеңдер.

- 2.52.** AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысады. Егер $AO = BO$ және $\angle CAO = \angle DBO$ болса, онда $\triangle ACO = \triangle BDO$ теңдігін дәлелдеңдер.
- 2.53.** ABC үшбұрышында $AB = BC$, BD – биссектриса. Егер: 1) A төбесіндегі сыртқы бұрышы 130° -қа тең болса, онда BCA бұрышын; 2) егер $AB = 5$ см, $AD = 2$ см болса, онда ABC үшбұрышының периметрін табыңдар.
- 2.54.** Тең қабырғалы үшбұрыштың: 1) барлық бұрыштары тең; 2) барлық медианалары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

С

- 2.55.** Табаны BC болатын ABC теңбүйірлі үшбұрышының медианасы AN . Егер ABC үшбұрышының периметрі 32 см, ал ABN үшбұрышының периметрі 24 см болса, онда AN -ді табыңдар.
- 2.56.** PRQ және PKQ үшбұрыштарының ортақ қабырғасы PQ , ал R және K нүктелері PQ -дің екі жағында орналасқан. Егер $PR = PK$, $QR = QK$ болса, онда PQ сәулесі KPR бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер (2.34-сурет).



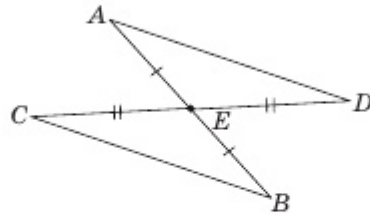
2.34-сурет

- 2.57.** AB кесіндісі – ABC және ABD теңбүйірлі үшбұрыштарының ортақ табаны, ал C және D төбелері AB -ға қатысты өртүрлі жарты жазықтықтарда орналасқан. AB және CD кесінділері қандай бұрыш жасап қиылысады?

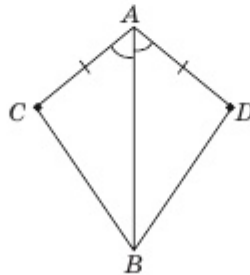
- 2.58.** Егер үшбұрыштың: 1) медианасы әрі биіктігі болса; 2) биіктігі әрі биссектрисасы болса, онда осы үшбұрыштың теңбүйірлі болатынын дәлелдеңдер.
- 2.59.** Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларына жүргізілген биссектрисалары өзара тең болатынын көрсетіңдер.
- 2.60.** Үшбұрыштың үлкен бұрышына қарсы үлкен қабырғасы, ал үлкен қабырғасына қарсы үлкен бұрышы жататынын дәлелдеңдер.
- 2.61.** Табаны AC болатын ABC теңбүйірлі үшбұрышының BD медианасы жүргізілген. $AE = CF$ болатындай AB және BC қабырғаларынан E және F нүктелері алынған.
1) $\triangle BDE = \triangle BDF$;
2) $\triangle ADE = \triangle CDF$ теңдіктерін дәлелдеңдер.
- 2.62.** Егер теңбүйірлі үшбұрыштардың табандары мен табандарына түсірілген биіктіктері тең болса, бұл үшбұрыштар тең болатынын дәлелдеңдер.
- 2.63.** $\triangle ACC_1 = \triangle BCC_1$ және A мен B төбелері CC_1 түзуіне қатысты әртүрлі жарты жазықтықтарда жатыр. ABC және ABC_1 үшбұрыштары теңбүйірлі болатынын дәлелдеңдер.
- 2.64*.** Үшбұрыштар теңдігін олардың медианалары және бұрыштарының осы медианалармен бөлінетін бөліктерінің теңдігі арқылы дәлелдеңдер.

«ҮШБҮРЫШТАР» БӨЛІМІ БОЙЫНША ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР

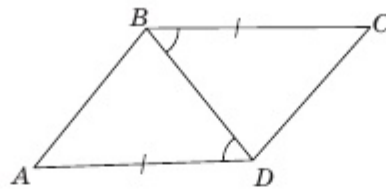
1. Дәлелдеу керек: $\triangle AED = \triangle BEC$.



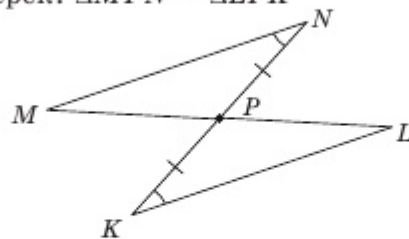
2. Дәлелдеу керек: $\triangle DAB = \triangle CAB$.



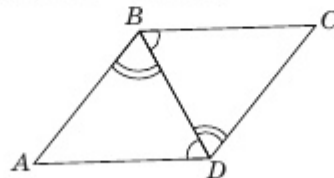
3. Дәлелдеу керек: $\triangle ABD = \triangle CDB$.



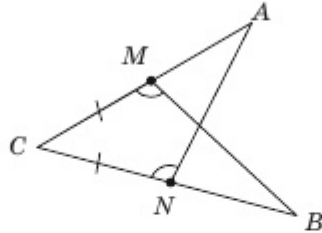
4. Дәлелдеу керек: $\triangle MPN = \triangle LPK$



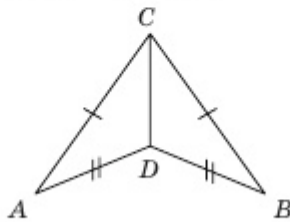
5. Дәлелдеу керек: $\triangle ABD = \triangle CDB$.



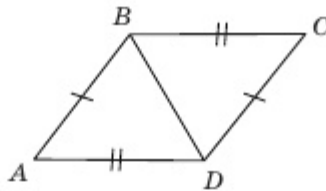
6. Дәлелдеу керек: $\triangle ACN = \triangle BCM$.



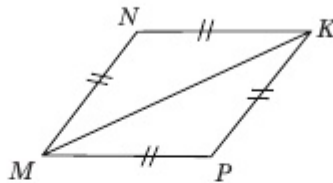
7. Дәлелдеу керек: $\triangle ACD = \triangle BCD$.



8. Дәлелдеу керек: $\triangle ABD = \triangle CBD$.

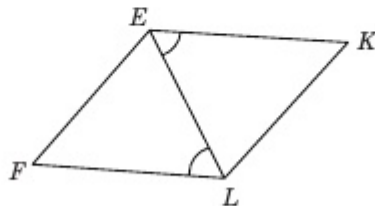


9. Дәлелдеу керек: $\angle N = \angle P$.



10. Берілгені: $EK = FL$.

Дәлелдеу керек: $FE = LK$.



Терминдер сөздігі

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Үшбұрыш төбелері	Вершины треугольника	Vertices of a triangle
Үшбұрыш	Треугольник	Triangle
Үшбұрыш қабырғалары	Стороны треугольника	Sides of a triangle
Іргелес бұрыштар	Прилежащие углы	Adjacent angles
Қарама-қарсы бұрыш	Противолежащий угол	Opposite angle
Үшбұрыш биіктігі	Высота треугольника	Altitude of a triangle
Үшбұрыш биссектрисасы	Биссектриса треугольника	Bisector of a triangle
Үшбұрыш медианасы	Медиана треугольника	Median of a triangle
Үшбұрыштың орта сызығы	Средняя линия треугольника	Midline of a triangle
Теңбүйірлі үшбұрыш	Равнобедренный треугольник	Isosceles triangle
Тең қабырғалы үшбұрыш	Равносторонний треугольник	Equilateral triangle

3. ТҮЗУЛЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІК БЕЛГІЛЕРІ

3.1. Түзулердің параллельдік белгілері

3.1.1. Параллель түзулер. Егер жазықтықтағы екі түзу қиылыспаса, онда бұл түзулерді **параллель түзулер** деп атаймыз. Егер a және b түзулері параллель болса, онда оны былай жазады: $a \parallel b$ (3.1-сурет).

Параллель түзулермен бірге параллель кесінділерді де қарастырады. Егер кесінділер параллель түзулер бойында жатса, онда бұл кесінділер **параллель кесінділер** деп аталады. 3.1-суретте PQ және EF кесінділері параллель.

Осы сияқты түзу мен кесіндінің, сәуле мен түзудің, кесінді мен сәуленің, екі сәуленің параллельдігі анықталады (3.1-сурет).

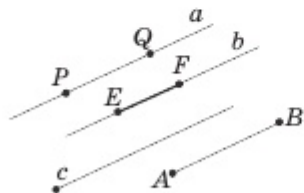
Түзулердің параллельдігі **аксиомасы**:

IX. Түзуде жатпайтын нүкте арқылы жазықтықта осы түзуге параллель тек бір ғана түзу жүргізуге болады.

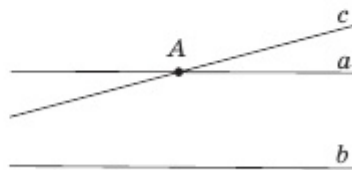
Теорема. Егер түзу параллель екі түзудің біреуін қиып өтсе, онда бұл түзу параллель түзулердің екіншісін де қиып өтеді.

Айталық, $a \parallel b$ және $a \cap c = A$ болсын (3.2-сурет). c түзуі мен b түзуінің қиылысатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Егер b және c түзулері қиылыспайтын болса, онда $b \parallel c$ болар еді, яғни A нүктесі арқылы b түзуіне параллель өртүрлі a және c түзулері өтер еді. Бұл IX аксиомаға қайшы. Олай болса, c түзуі a түзуін қиып өтсе, онда ол b түзуін де қиып өтуі керек.



3.1-сурет

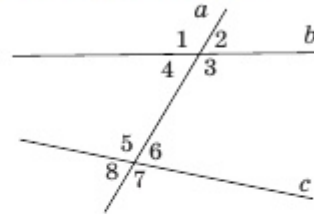


3.2-сурет

3.1.2. Екі түзудің қиюшымен жасайтын бұрыштары

a түзуі b және c түзулерімен қиылысатын болсын (3.3-сурет). Мұнда a түзуі *қиюшы* деп аталады. b және c түзулерінің a қиюшысымен жасайтын бұрыштар жұбының арнайы атаулары бар:

- 3 пен 6, 4 пен 5-бұрыштар – *ішкі тұстас* бұрыштар;
- 3 пен 5, 4 пен 6-бұрыштар – *ішкі айқыш* бұрыштар;
- 1 мен 5, 2 мен 6, 4 пен 8, 3 пен 7-бұрыштар жұбы – *сәйкес бұрыштар*.



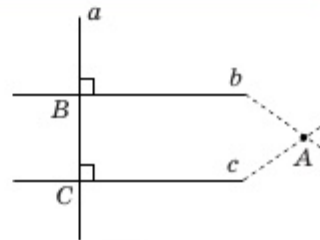
3.3-сурет

Теорема 1. Егер a түзуі b және c түзулерін бірдей бұрыш жасап қиып өтсе, онда b және c түзулері параллель болады.

$a \cap b, a \cap c, \angle(ab) = \angle(ac)$ болсын. $b \parallel c$ болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. $b \parallel c$ болсын. Онда $A = b \cap c$ нүктесі бар болады.

Егер $B = a \cap b, C = a \cap c$ болса, онда A нүктесінен a түзуіне екі: AB және AC перпендикулярлары жүргізілген болып шығады. Ал бұлай болуы мүмкін емес. Себебі түзудің әрбір нүктесінен оған перпендикуляр бір ғана түзу жүргізуге болады. Демек бұл қайшылық $b \parallel c$ екенін дәлелдейді (3.4-сурет). ■



3.4-сурет

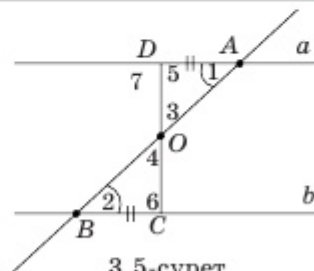
Теорема 2. (Түзулер параллельдігінің белгілері). Егер екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болған: 1) айқыш бұрыштар тең болса; 2) сәйкес бұрыштар тең болса; 3) ішкі тұстас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең болса, онда бұл екі түзу параллель болады.

1 a және b түзулерін AB қиюшысымен қиғанда пайда болған айқыш бұрыштар тең болсын: $\angle 1 = \angle 2$.

$a \parallel b$ екенін дәлелдейік (3.5-сурет).

Дәлелдеуі.

- Егер 1 және 2-бұрыштар тік болса, онда 1-теорема бойынша $a \parallel b$.



3.5-сурет

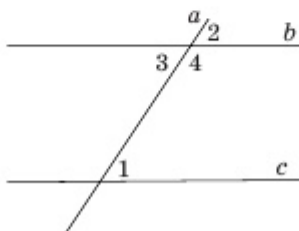
3

ТҮЗУЛЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІК БЕЛГІЛЕРІ

• Енді 1 және 2-бұрыштар тік болмаған жағдайда AB кесіндісінің ортасы – O нүктесі арқылы a түзуіне OD перпендикуляр түсірейік және $OD \cap b = C$.

D мен C нүктелері AB түзуіне қатысты әртүрлі жарты жазықтықтарда жатыр. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (вертикаль бұрыштар және $OA = OB$, $BC = AD$ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің I белгісі бойынша $\triangle OAD = \triangle OBC$).

$\angle 6 = \angle 5 = \angle 7 = 90^\circ$ екенін ескерсек, C , O , D нүктелері бір түзудің бойында жататыны және $DC \perp a$, $DC \perp b$ екені шығады. Сондықтан 1-теорема бойынша $a \parallel b$. ■



3.6-сурет

2) $\angle 1 = \angle 2$ болсын (3.6-сурет). $b \parallel c$ екенін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Шынында да, вертикаль бұрыштар ретінде $\angle 2 = \angle 3$. Онда $\angle 3 = \angle 1$, яғни ішкі айқыш бұрыштары тең. Сондықтан 2-теореманың 1)-белгісі бойынша $b \parallel c$. ■

3) $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ болсын (3.6-сурет). $b \parallel c$ екенін көрсетейік.

Дәлелдеуі. Шынында да, $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ (сыбайлас бұрыштар). Осыдан $\angle 1 = \angle 3$ болып, 2-теореманың 1)-тұжырымы бойынша $b \parallel c$. ■

Дәлелденген теореманың 1), 2) және 3)-тұжырымдамаларын *түзулер параллельдігінің сәйкесінше I, II және III белгілері* деп атайды. Бұл теоремаға кері теорема да орындалады.

Теорема 3 (Кері теорема). Екі параллель түзуді қиюшымен қиып өткенде пайда болған:

- 1) ішкі айқыш бұрыштар тең болады;
- 2) сәйкес бұрыштар тең болады;
- 3) ішкі тұстас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең болады.

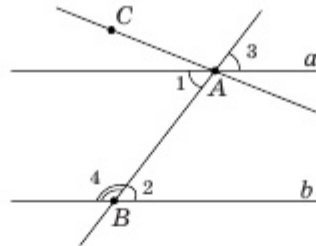
1) $a \parallel b$, AB – қиюшы (3.7-сурет). $\angle 1 = \angle 2$ екенін көрсетейік.

Дәлелдеуі. Кері жорып, $\angle 1 \neq \angle 2$ болсын делік. Онда AB түзуінің $\angle 1$ -ы орналасқан жағына $\angle 2$ -қа тең болатын CAV бұрышын саламыз.

Түзулер параллельдігінің I белгісі бойынша $AC \parallel b$ (себебі салуымыз бойынша $\angle CAV = \angle 2$). Ал теорема шарты бойынша $a \parallel b$ екенін ескерсек, онда A нүктесі арқылы b түзуіне параллель екі түзу (a және AC) өтіп тұр. Бұл параллельдік аксиомасына қайшы. Алынған қайшылық $\angle 1 \neq \angle 2$ теңсіздігін теріске шығарады, яғни $\angle 1 = \angle 2$ болуы қажет. ■

2) *Дәлелдеуі.* Егер $a \parallel b$ болса, онда дәлелдегеніміз бойынша $\angle 1 = \angle 2$ (3.7-сурет). Ал вертикаль бұрыштар ретінде $\angle 1 = \angle 3$. Олай болса, $\angle 2 = \angle 3$, яғни сәйкес бұрыштар тең. ■

3) *Дәлелдеуі.* Егер $a \parallel b$ болса, онда дәлелденген 1)-тұжырым бойынша $\angle 1 = \angle 2$ (3.7-сурет). Ал $\angle 2$ және $\angle 4$ сыбайлас бұрыштар болғандықтан, $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$. Демек, $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. ■



3.7-сурет



Геометрияның даму кезеңі Мысыр елінен бастау алып, Ежелгі Грек елінде жалғасты. Грек геометрлерінің көптеген ғасырлар бойы жинақтаған еңбектерін қорытындылап, Евклид (б.з.б. III ғасыр) өзінің атақты «Бастамалар» атты еңбегінде бір жүйеге келтіріп, аксиомалар жүйесін енгізді. Бұл жүйенің құрамында V постулат болды. Осы постулаттан оған балама мынадай тұжырым алуға болады: түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге параллель бір ғана түзу жүргізуге болады. Осы параллельдік аксиомасы өзге аксиомалармен салыстырғанда көрнекілігі жағынан кем түседі. Мысалы, егер b түзуін A нүктесі маңында өте кіші бұрышқа бұрсақ

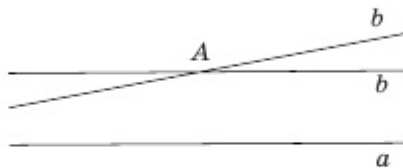


Евклид

3

ТҮЗУЛЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІК БЕЛГІЛЕРІ

та, шыққан түзу a түзуін қиып өтетін сияқты болып көрінеді (3.8-сурет).



3.8-сурет



Н.И. Лобачевский –
орыс математигі

Ғалымдар V постулатты теорема ретінде «дәлелдеуге» тырысып бақты. Бірақ олардың бұл әрекеттері ылғи да нәтижесіз аяқталып отырды. Тек XIX ғасырда ғана Евклидтің V постулаты өзге аксиомалар көмегімен дәлелденбейтіндігі және ол параллельдік аксиомасының баламасы екені дәлелденді. Осы мәселені шешу барысында орыстың ғұлама математигі Николай Иванович Лобачевскийдің (1792–1856) еңбектері шешуші үлес қосты.



1. Параллель түзулер дегеніміз не? Параллель кесінділер деп қандай кесінділерді айтады?
2. Түзулердің параллельдік аксиомасын айтыңдар.
3. Ішкі тұстас, айқыш бұрыштар дегеніміз қандай бұрыштар?
4. Сәйкес бұрыштар дегеніміз қандай бұрыштар?
5. Түзулер параллельдігінің 3 белгісін дәлелдеңдер.



1. Параллель түзулерді салудың бірнеше тәсілін көрсетіңдер.
2. Қоршаған ортадан параллель түзулер мен параллель кесінділерге бірнеше мысал қарастырыңдар.
3. Дөптердің торкөз сызықтарына параллель емес a түзуіне A нүктесінен көз мөлшерімен перпендикуляр түсіріңдер. Нәтижесін транспортірді қолданып тексеріңдер.

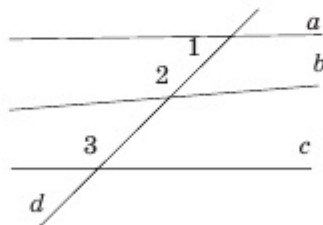
Жаттығулар

А

- 3.1. ABC үшбұрышы берілген. C төбесінен AB қабырғасына параллель неше түзу жүргізуге болады?
- 3.2. Егер A және D нүктелері BC түзуінің бір жағында жатса және $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle BCD = 110^\circ$ болса, онда AB және

CD түзулері: 1) параллель; 2) қиылысушы түзулер болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

- 3.3. Егер $\angle ABC = 65^\circ$ және $\angle BCD = 105^\circ$ болса, онда 3.2-есептің сұрақтарына жауап беріңдер.
- 3.4. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғандағы ішкі тұстас бұрыштардың айырмасы 50° . Осы бұрыштарды табыңдар.
- 3.5. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғандағы ішкі тұстас бұрыштардың айырмасы 30° . Осы бұрыштарды табыңдар.
- 3.6. Қиюшы мен параллель екі түзу арасындағы айқыш бұрыштардың қосындысы 150° . Осы бұрыштарды табыңдар.
- 3.7. Қиюшы параллель екі түзумен қиылысқанда пайда болатын бұрыштардың бірі 72° . Қалған 7 бұрышты табыңдар.
- 3.8. Қиюшы мен параллель екі түзу арасындағы бұрыштардың бірі 30° . Өзге 7 бұрыштың бірі 70° -қа тең болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 3.9. Қиюшы мен параллель екі түзу арасындағы ішкі айқыш бұрыштардың қосындысы 210° . Осы бұрыштарды табыңдар.
- 3.10. 3.9-суретте a, b, c түзулері d қиюшысымен қиылысқан. $\angle 1 = 42^\circ$, $\angle 2 = 140^\circ$, $\angle 3 = 138^\circ$, a, b және c түзулерінің қайсылары өзара параллель?

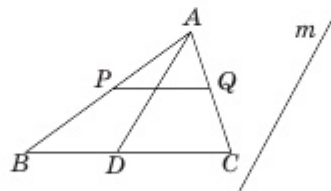


3.9-сурет

- 3.11.** Егер қиюшы мен параллель екі түзу арасындағы бұрыштардың бірінің шамасы: 1) 150° болса; 2) екіншісінен 70° үлкен болса, онда барлық бұрыштарды табыңдар.

В

- 3.12.** a түзуі ABC үшбұрышының AB қабырғасына параллель. Егер A нүктесімен a түзуіне дейінгі қашықтық 5 см болса, онда B нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтық қандай?
- 3.13.** a түзуі AB кесіндісін оның ортасы O нүктесінде қияды. Егер A нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтық 5 см болса, онда B нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтық қандай?
- 3.14.** AB кесіндісінің ұштары параллель a және b түзулерінде жатады. AB -нің ортасы O арқылы өтетін түзу a мен b -ні C және D нүктелерінде қияды. Егер $CD = 22$ см болса, CO -ны табыңдар.
- 3.15.** Екі параллель түзуді үшінші түзумен қиғанда пайда болатын ішкі тұстас бұрыштардың биссектрисалары қандай бұрышпен қиылысады?
- 3.16.** ABC үшбұрышы берілген. m түзуі AD түзуіне параллель, $D \in BC$, $P \in AB$, $Q \in AC$ және $PQ \parallel BC$. m түзуі AB , AC , BC , PD , PQ және QD түзулерімен қиылысатынын дәлелдеңдер (3.10-сурет).

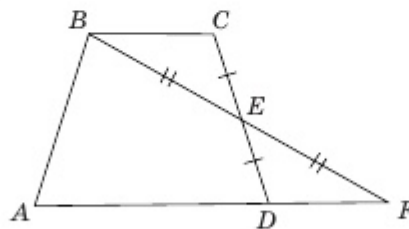


3.10-сурет

- 3.17.** $AB = CD$, $AB \parallel CD$ және бұл кесінділер O нүктесінде қиылысады. $AB = AC$ деп алып, $\angle AOC$ -ын табыңдар.

С

- 3.18. a түзуінде жатпайтын нүкте арқылы үш түзу жүргізілген. Осы түзулердің кем дегенде екеуі a түзуімен қиылысатынын дәлелдендер.
- 3.19. Егер $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$ болса, онда $a \parallel d$ екенін дәлелдендер.
- 3.20. Өзара перпендикуляр AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысып, осы нүктемен әрқайсысы қақ бөлінеді. $\angle ACD = 60^\circ$. $AD \parallel CB$ болатынын көрсетіп, $\angle ABC$ -ын табыңдар.
- 3.21*. a және b түзулері берілген. Егер a түзуін қиып өтетін кез келген түзу b түзуін де қиып өткенде пайда болған сәйкес бұрыштар тең болса, онда $a \parallel b$ болатынын дәлелдендер.
- 3.22. a және b түзулерінің үшінші түзумен қиылысуынан пайда болатын ішкі айқыш бұрыштар тең болмаса, онда a және b түзулері қиылысатынын дәлелдендер.
- 3.23. B бұрышының биссектрисасында жататын D нүктесінен оның қабырғаларына DA және DC перпендикулярлары түсірілген. $DA = DC$ теңдігін дәлелдендер.
- 3.24. Егер екі бұрыштың сәйкес екі қабырғасы өзара перпендикуляр, ал өзге екі қабырғасы өзара параллель болса, онда осы бұрыштардың қосындысын табыңдар.
- 3.25. 3.11-суретте $BC \parallel AD$, $CE = ED$ болса, онда $BE = EF$ болатынын дәлелдендер. $BC = 2$ см, $AF = 6$ см. AD -ні табыңдар.



3.11-сурет

3.2. Үшбұрыш қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар

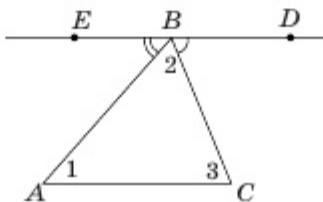
3.2.1. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы

Теорема 4. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180° -қа тең.

ABC үшбұрышы берілсін. Осы үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180° -қа тең екенін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. B төбесінен AC табанына параллель DE түзуін жүргіземіз (3.12-сурет). Онда түзулер параллельдігінің 1-белгісі бойынша $DE \parallel AC$ болғандықтан, $\angle 1 = \angle ABE$ және $\angle 3 = \angle CBD$.

Екінші жағынан, (жазыңқы бұрыш) $\angle ABE + \angle 2 + \angle CBD = 180^\circ$, бірақ $\angle 1 = \angle ABE$, $\angle 3 = \angle CBD$. Сондықтан $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. ■



3.12-сурет

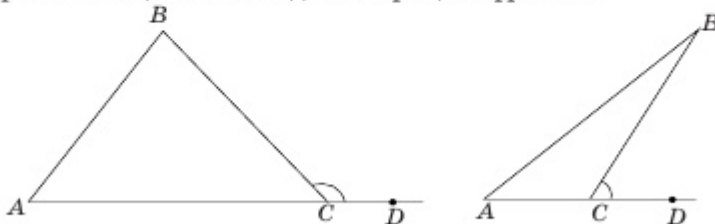
1-мысал. Үшбұрыштың екі доғал бұрышы болуы мүмкін бе?

Шешуі. Екі доғал бұрыштың қосындысы 180° -тан артық, сондықтан үшбұрыштың екі бұрышы доғал болуы мүмкін емес.

2-мысал. Тең қабырғалы үшбұрыштың әр бұрышы 60° -қа тең екенін көрсетейік.

Шешуі. Егер $\triangle ABC$ тең қабырғалы болса, онда оның барлық бұрышы тең: $\angle A = \angle B = \angle C$. 4-теорема бойынша: $\angle A + \angle B + \angle C = 3\angle A = 180^\circ$. Осыдан $\angle A = 60^\circ$.

Үшбұрыш бұрышына сыбайлас бұрышты оның **сыртқы бұрышы** деп атайды. 3.13-суретте $\angle BCD$ бұрышы – ABC үшбұрышының C төбесіндегі сыртқы бұрышы.



3.13-сурет

Теорема 5. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес екі бұрышының қосындысына тең.

$\triangle ABC$ берілсін. AC қабырғасын созып, оның бойынан D нүктесін белгілейік. $\angle BCD = \angle A + \angle B$ болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. 4-теорема бойынша $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ болғандықтан, $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$. Сонымен бірге $\angle C + \angle BCD = 180^\circ$ (сыбайлас бұрыштар). Сондықтан $\angle BCD = 180^\circ - \angle C$. Осыдан $\angle A + \angle B = \angle BCD$ (3.13-сурет). ■

3.2.2. Тікбұрышты үшбұрыш. Егер үшбұрыштың бір бұрышы 90° -қа тең болса, онда бұл үшбұрышты *тікбұрышты үшбұрыш* деп атайды. Тік бұрышқа қарсы жатқан қабырғасы *гипотенуза* деп, ал өзге екі қабырғасы *катеттері* деп аталады (3.14-сурет).

Тікбұрышты үшбұрыштардың бір ортақ элементі бар – ол тік бұрышы. Сондықтан *тікбұрышты үшбұрыштар үшін теңдік белгілерін* былай айтуға болады:



3.14-сурет

I белгі. Егер тікбұрышты үшбұрыштың екі катеті екінші тікбұрышты үшбұрыштың екі катетіне тең болса, онда бұл тікбұрышты үшбұрыштар тең болады.

II белгі. Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың катеті мен оған іргелес сүйір бұрышы екінші тікбұрышты үшбұрыштың сәйкес катеті мен оған іргелес сүйір бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.

III белгі. Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен сүйір бұрышы екінші тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен сәйкес сүйір бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.

IV белгі. Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың катеті мен гипотенузасы екінші тікбұрышты үшбұрыштың сәйкес катеті мен гипотенузасына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.

Мұнда I белгі – үшбұрыштар теңдігінің I белгісінің салдары, II, III белгілер үшбұрыштар теңдігінің II белгісінен шығады. Ал IV белгі 2.2.5-бабтың 3-мысалында дәлелденген.

Теорема 6. Тікбұрышты үшбұрыштың 30° -қа тең бұрышына қарсы жатқан катеті гипотенузасының жартысына тең.

$\triangle ABC$ берілсін $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. 30° бұрышқа қарсы жатқан AC катеті AB гипотенузаның жартысына тең екенін дәлелдейік (3.15-сурет).

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышына тең BCD тікбұрышты үшбұрышын саламыз. Мұнда $\angle CBD = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ болғандықтан, $\angle BAC = 60^\circ$. Олай болса, ABD үшбұрышының барлық бұрыштары 60° -қа тең, яғни $\triangle ABD$ – тең қабырғалы. Осыдан $AD = AB$, олай болса, $AC = \frac{1}{2} AD$ және $AC = \frac{1}{2} AB$. Демек, 30° бұрышқа қарсы жатқан AC катеті гипотенузаның жартысына тең. ■

Тағы бірнеше маңызды ұғым енгізейік. $\triangle ABC$ -ы тікбұрышты үшбұрыш ($\angle C = 90^\circ$) болсын. Онда BC катеті AC түзуіне түсірілген перпендикуляр болады (3.15-сурет).

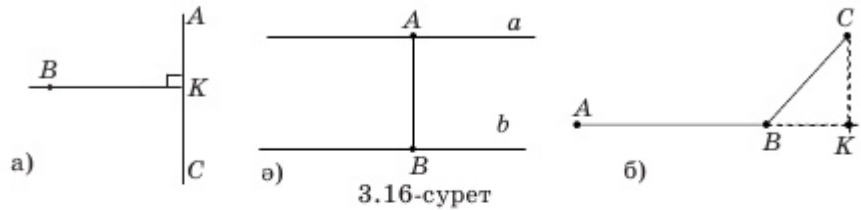
AB гипотенузасын B нүктесінен AC түзуіне жүргізілген *көлбеу* деп атайды. Ал AC катетін AB көлбеуінің AC түзуіндегі *проекциясы* деп атайды.



3.15-сурет

Жалпы екі фигура арасындағы қашықтық деп олардың ең жақын орналасқан нүктелерінің (мұндай нүктелері бар болса) *арақашықтығын* айтады. Мысалы:

- 3.16, а-суретте B нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтық BK перпендикулярларының ұзындығына тең;
- 3.16, ә-суретте a және b түзулерінің арақашықтығы AB перпендикулярларының ұзындығына тең;
- 3.16, б-суретте C нүктесінен AB кесіндісіне дейінгі қашықтық CK перпендикулярларының ұзындығына тең.



3.16-сурет



1. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең?
2. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы деп нені айтады?
3. Тікбұрышты үшбұрыш дегеніміз қандай үшбұрыш? Оның элементтерін атаңдар.
4. Тікбұрышты үшбұрыштар теңдігінің белгілерін айтыңдар.
5. Көлбеу дегеніміз не? Проекция дегеніміз не?
6. Фигуралардың арақашықтығы деп нені түсінеді?



a түзуін сызып, одан тысқары A нүктесін алыңдар. A нүктесінен a түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

Жаттығулар

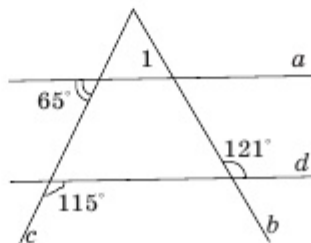
A

- 3.26. Теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.
- 3.27. ABC үшбұрышында $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 32$ см. AC -ні табыңдар.
- 3.28. ABC үшбұрышының A және B төбелеріндегі бір-бірден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысы 240° . C бұрышын табыңдар.
- 3.29. Үшбұрыштың бір ішкі бұрышы 30° , ал бір сыртқы бұрышы 40° . Үшбұрыштың қалған ішкі бұрыштарын табыңдар.
- 3.30. Егер үшбұрыштың екі бұрышы: 1) 50° және 30° ; 2) 40° және 75° ; 3) 60° және 80° ; 4) 25° және 120° -қа тең болса, онда оның үшінші бұрышын табыңдар.

- 3.31.** Егер үшбұрыштың екі бұрышы: 1) 54° және 36° ; 2) 42° және 78° ; 3) 65° және 35° ; 4) 33° және 120° -қа тең болса, онда оның үшінші төбесіндегі сыртқы бұрышын табыңдар.
- 3.32.** Егер теңбүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы: 1) 40° ; 2) 60° ; 3) 100° -қа тең болса, онда осы үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

В

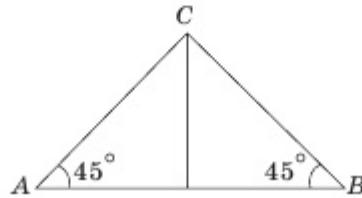
- 3.33.** 3.17-суретті пайдаланып, $\angle 1$ -ты табыңдар.



3.17-сурет

- 3.34.** Егер үшбұрыш бұрыштарының қатынасы 3:8:5 қатынасындай болса, онда бұл үшбұрыш тікбұрышты үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.
- 3.35.** Үшбұрыштың бір бұрышы екіншісінен 30° үлкен, ал үшіншісінен 30° кіші. Үшбұрыштың барлық бұрыштарын табыңдар.
- 3.36.** Табаны AC болатын ABC теңбүйірлі үшбұрышының биссектрисасы AD . Егер $\angle C = 50^\circ$ болса, онда $\angle ADC$ -ын табыңдар.
- 3.37.** ABC үшбұрышының A және B бұрыштарының биссектрисалары N нүктесінде қиылысады. Егер $\angle A = 58^\circ$, $\angle B = 96^\circ$ болса, онда $\angle ANB$ -ын табыңдар.
- 3.38.** ABC үшбұрышында $AB = 18$ см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

- 1) A нүктесінен BC түзуіне дейінгі қашықтықты; 2) AB көлбеуінің AC түзуіндегі проекциясын табыңдар.
- 3.39. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына қарсы жатқан бұрышының сыртқы бұрышының биссектрисасы табанына параллель болатынын дәлелдеңдер.
- 3.40. Теңбүйірлі үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының бірі 115° . Үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.
- 3.41. ABC үшбұрышында $\angle A = \angle B = 45^\circ$ және $AB = 19$ см.
 1) C нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтықты;
 2) AC кесіндісінің AB түзуіндегі проекциясын табыңдар (3.18-сурет).



3.18-сурет

- 3.42. ABC теңбүйірлі үшбұрышының табаны AC , биссектрисасы AD . $\angle ADB = 110^\circ$. ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.
- 3.43. Егер тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан түсірілген биіктігі катетімен 50° -қа тең бұрыш жасайтын болса, осы үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.
- 3.44. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының биссектрисалары 135° бұрыш жасап қиылысатынын дәлелдеңдер.
- 3.45. Тікбұрышты үшбұрыштың екі биссектрисасы 70° бұрыш жасап қиылысады деп алып, осы үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

C

- 3.46. Егер ABC үшбұрышының AD медианасы BC қабырғасының жартысына тең болса, A бұрышының градус-тық өлшемі неге тең?

- 3.47. BP және AC кесінділерінің орталары, CQ және AB кесінділерінің орталары беттесетіндей етіп, $\triangle ABC$ мен P және Q нүктелері берілген. A , P , Q нүктелері бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер. $BC = 3$ см деп алып, PQ кесіндісінің ұзындығын табыңдар.
- 3.48. PT – PQR үшбұрышының биссектрисасы. PT -нің ортасы арқылы өтетін оған перпендикуляр түзу PQ және PR қабырғаларын сәйкесінше A және B нүктелерінде қиып өтеді. $AP = 4$ см. AT кесіндісінің ұзындығын табыңдар.
- 3.49. Тікбұрышты үшбұрыштың екі биссектрисасы 40° бұрыш жасап қиылысуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздендер.
- 3.50*. 3.2.1-баптағы 2-мысалда келтірілген тұжырымға кері тұжырымды пайымдап, оны дәлелдеңдер.

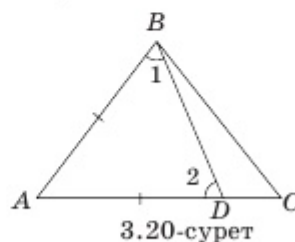
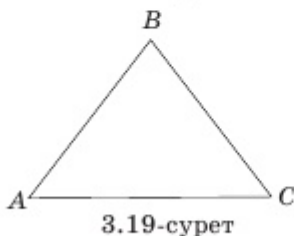
3.2.3. Үшбұрыш қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар

Теорема 1. Үшбұрыштың үлкен қабырғасына үлкен бұрышы қарсы жатады және керісінше, үлкен бұрышына үлкен қабырғасы қарсы жатады.

1 ABC үшбұрышында AC қабырғасы AB қабырғасынан үлкен болсын (3.19-сурет).

Дәлелдеуі. $\angle B > \angle C$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдейік. Ол үшін AC -нің бойына AB -ға тең AD кесіндісін өлшеп саламыз (3.20-сурет). $AD = AB < AC$ болғандықтан, D нүктесі A мен C нүктелерінің арасында жатады.

BD кесіндісін жүргіземіз. Онда $\triangle ABD$ – теңбүйірлі, яғни $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 1$ – B бұрышының бөлігі, яғни $\angle 1 < \angle B$.



Ал $\angle 2$ BDC үшбұрышының сыртқы бұрышы болғандықтан, $\angle 2 = \angle C + \angle DBC$ теңдігі орындалады, яғни $\angle 2 > \angle C$.

$\triangle ABD$ теңбүйірлі болғандықтан, $\angle 1 = \angle 2$. Олай болса, $\angle B > \angle C$ теңсіздігі орындалады.

2 Керісінше, ABC үшбұрышында $\angle B > \angle C$ теңсіздігі орындалсын. Онда $AC > AB$ теңсіздігі орындалатынын көрсетейік.

Дәлелдеуі. Қарсы жорып, бұл теңсіздік орындалмайды делік. Онда не $AC = AB$, не $AC < AB$ болуы керек.

- Егер $AC = AB$ болса, онда $\triangle ABC$ теңбүйірлі үшбұрыш болып, $\angle B = \angle C$ теңдігі орындалар еді, бұл $\angle B > \angle C$ теңсіздігіне қайшы келеді.

- Егер $AC < AB$ болса, онда дәлелдегеніміз бойынша $\angle B < \angle C$ теңсіздігі орындалуы қажет, бұл да $\angle B > \angle C$ теңсіздігіне қайшы келеді. Онда біздің қарсы жоруымыз қате, яғни $AC > AB$ теңсіздігі орындалады. ■

1-мысал. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы катетінен үлкен болатынын көрсетейік.

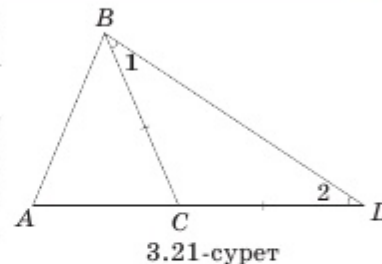
Шынында да, тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы тікбұрышқа қарсы жатады, ал катет сүйір бұрышқа қарсы жатады. Тікбұрыш сүйір бұрыштан үлкен болғандықтан, дәлелденген 1-теорема бойынша гипотенуза катеттен үлкен болады.

3.2.4. Үшбұрыш теңсіздігі

Теорема 2. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы өзге екі қабырғасының қосындысынан кіші болады.

Кез келген ABC үшбұрышы берілсін. $AB < AC + BC$ теңсіздігі орындалатынын көрсетейік.

Дәлелдеуі. Ол үшін AC қабырғасының созындысынан $CB = CD$ теңдігі орындалатындай етіп, CD кесіндісін өлшеп саламыз (3.21-сурет).



3.21-сурет

Салуымыз бойынша BCD – теңбүйірлі үшбұрыш: BD – табаны, $\angle 1 = \angle 2$, ал ABD үшбұрышында $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = \angle ABC + \angle 1$. $\angle 1 = \angle 2$ болғандықтан, $\angle ABD = \angle ABC + \angle 2$. Демек, $\angle ABD > \angle 2$. Онда 1-теорема бойынша $AB < AD$ теңсіздігі орындалады. $AD = AC + CD$ және $CD = BC$ болғандықтан, $AB < AC + BC$ теңсіздігі орындалады. ■

Дәлелденген теңсіздік үшбұрыштың кез келген қабырғасы үшін орындалады, яғни ABC үшбұрышы үшін мына теңсіздіктер ақиқат:

$$\begin{cases} AB < AC + BC, \\ AC < AB + BC, \\ BC < AB + AC. \end{cases} \quad (1)$$

Бұл теңсіздіктерді *үшбұрыш теңсіздігі* деп атайды.

2-мысал. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы өзге екі қабырғаларының айырмасынан үлкен болады.

Шынында да, үшбұрыштың (1) теңсіздігінен мына теңсіздіктерді аламыз:

$$BC > AB - AC,$$

$$AB > AC - BC,$$

$$AC > BC - AB.$$



1. Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар жөніндегі 1-теореманы дәлелдеңдер.
2. Тікбұрышты үшбұрыштарда гипотенуза катеттен үлкен болатынын көрсетіңдер.
3. Үшбұрыш теңсіздігі жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
4. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы өзге екі қабырғасының айырмасынан үлкен болатынын көрсетіңдер.



Көз мөлшерімен қабырғалары әртүрлі үшбұрыш салып, өлшеуіш құралдары көмегімен 1-теорема мен 2-теореманың орындалатынын тексеріңдер.

Жаттығулар

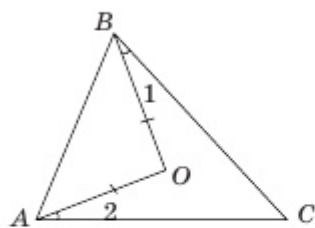
А

- 3.51. ABC үшбұрышында $BC > AC > AB$. Үшбұрыш бұрыштарының қайсысы үлкен: 1) B бұрышы ма әлде A бұрышы ма? 2) C бұрышы ма әлде A бұрышы ма?
- 3.52. Қабырғалары: 1) 2 см, 3 см және 5 см; 2) 2,1 дм, 2 дм және 4 дм; 3) 4 м, 3 м және 6 м болатын үшбұрыш табыла ма?
- 3.53. Егер: 1) $\angle A > \angle B > \angle C$; 2) $\angle A = \angle B < \angle C$ болса, онда ABC үшбұрышының қабырғаларын салыстырыңдар.

- 3.54. ABC үшбұрышында $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см. A , B және C бұрыштарын салыстырыңдар.
- 3.55. Егер үшбұрыштың: 1) екі бұрышы тең; 2) үш бұрышы да тең болса, онда бұл үшбұрыш қалай аталады?
- 3.56. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 6 см болса, онда оның табаны 15 см-ге тең болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 3.57. Үшбұрыш қабырғаларының қатынасы: 1) $2 : 3 : 4$; 2) $2 : 3 : 5$ -ке тең болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

В

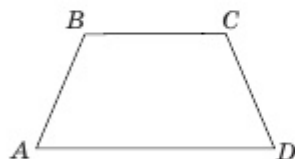
- 3.58. Үлкен бұрышы өзге екі бұрышының қосындысынан кіші болатын үшбұрыштың түрі қандай?
- 3.59. Екі қабырғасының ұзындығы: 1) 2 см және 5 см; 2) 21 см және 9 см; 3) 6 дм және 3 дм болатын теңбүйірлі үшбұрыштың үшінші қабырғасын табыңдар.
- 3.60. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір қабырғасы 20 см, ал екіншісі 10 см. Бұлардың қайсысы үшбұрыштың табаны болуы мүмкін?
- 3.61. ABC үшбұрышында $\angle B = 70^\circ$. Осы бұрыштың биссектрисасы AC қабырғасын D нүктесінде қияды және $BD = CD$. $AB < AC$ теңсіздігін дәлелдеңдер.
- 3.62. D нүктесі ABC теңбүйірлі үшбұрышының BC табанында жатыр. AD кесіндісі үшбұрыштың бүйір қабырғасынан кіші болатынын көрсетіңдер.
- 3.63. D нүктесі ABC үшбұрышының AC қабырғасында жатыр және $\angle C = 108^\circ$, $BD = 4,3$ см, $AB < 6$ см. Егер AB қабырғасының ұзындығы бүтін санмен өрнектелетіні белгілі болса, онда AB -нің ұзындығын табыңдар.



3.22-сурет

3.64. 3.22-суретте $AO = BO$, $\angle 1 = \angle 2$. $AC = BC$ теңдігін дәлелдеңдер.

3.65. D және E нүктелері ABC үшбұрышының сәйкес AB және BC қабырғаларында жатыр. $AD = CE$, $AE = CD$. ABC үшбұрышы теңбүйірлі болатынын дәлелдеңдер.



3.23-сурет

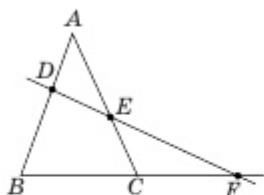
3.66. $AD < AB + BC + CD$ теңсіздігін дәлелдеңдер (3.23-сурет).

3.67. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 50 см, ал бір қабырғасы 10 см. Оның өзге қабырғаларын табыңдар.

C

3.68. Үшбұрыштың медианасы осы төбеден жүргізілген биіктіктен кіші болмайтынын дәлелдеңдер.

3.69. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 36 см, екі қабырғасының айырмасы 6 см, ал бір төбесіндегі сыртқы бұрышы сүйір. Үшбұрыш қабырғаларын табыңдар.



3.24-сурет

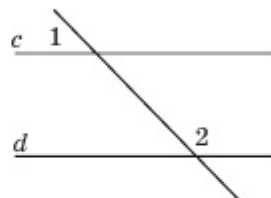
3.70. Түзу теңбүйірлі үшбұрыштың AB және AC бүйір қабырғаларын сәйкесінше D және E нүктелерінде, ал BC түзуін F нүктесінде қиып өтеді. $AE > AD$ теңсіздігін дәлелдеңдер (3.24-сурет).

3.71. Үшбұрыштың әртүрлі төбелеріндегі екі сыртқы бұрышы тең. Үшбұрыштың периметрі 74 см, ал бір қабырғасы 16 см. Оның қалған екі қабырғасын табыңдар.

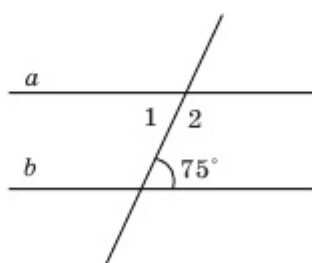
3.72. AB және CD кесінділері O нүктесінде қиылысып, қиылысу нүктесінде әрқайсысы қақ бөлінеді. $AO < \frac{AC + AD}{2}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

**«ТҮЗУЛЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІК БЕЛГІЛЕРІ» БӨЛІМІ
БОЙЫНША ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР**

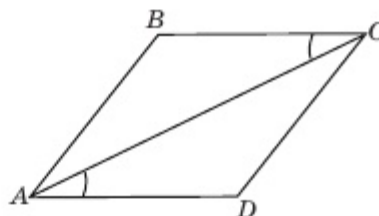
1. Берілгені: $c \parallel d$, $\angle 1 = 48^\circ$.
Табу керек: $\angle 2$.



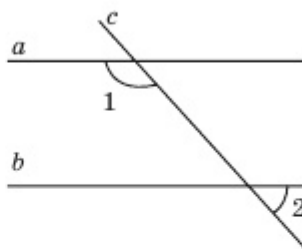
2. Берілгені: $a \parallel b$.
Табу керек: $\angle 1$, $\angle 2$.



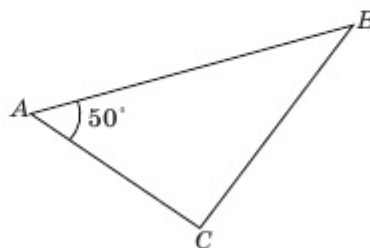
3. Дәлелдеу керек: $AD \parallel BC$.



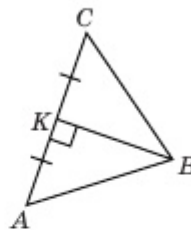
4. Берілгені: $a \parallel b$.
 $\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2$
Табу керек: $\angle 1$, $\angle 2$.



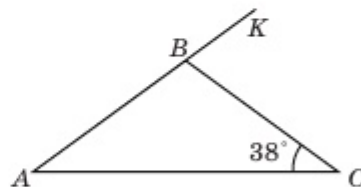
5. Берілгені: $\angle C : \angle B = 3 : 2$.
Табу керек: $\angle B$, $\angle C$.



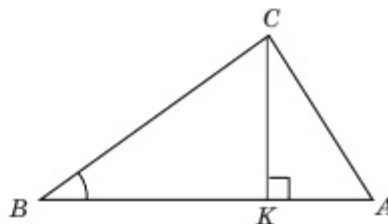
6. Берілгені:
 BK – биіктік,
 $AK = KC$,
 $\angle C = 48^\circ$.
 Табу керек: $\angle ABK$.



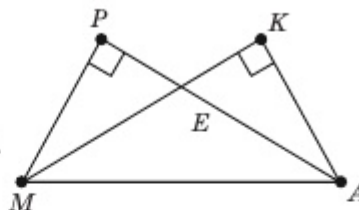
7. Берілгені:
 $AB = BC$,
 $\angle C = 38^\circ$.
 Табу керек: $\angle KBC - \angle BAC$.



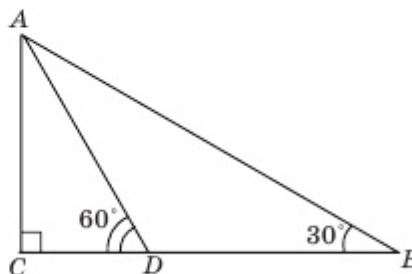
8. Берілгені:
 $\angle ACB = 90^\circ$,
 $\angle B = 34^\circ$,
 $CK \perp AB$.
 Табу керек: $\angle ACK$.



9. Берілгені:
 $\angle P = \angle K = 90^\circ$,
 $MP = KA$.
 Дәлелдеу керек: $ME = EA$.



10. Табу керек: CD .



Терминдер сөздігі

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Параллель түзулер	Параллельные прямые	Parallel lines
Қиюшы	Секущая	Secant
Ішкі тұстас бұрыштар	Внутренние односторонние углы	Interior same-side angles
Ішкі айқыш бұрыштар	Внутренние накрест лежащие углы	Interior alternate angles
Сәйкес бұрыштар	Соответственные углы	Corresponding angles
Үшбұрыштың ішкі бұрыштары	Внутренние углы треугольника	Interior angles of a triangle
Үшбұрыштың сыртқы бұрыштары	Внешние углы треугольника	Exterior angles of a triangle
Үшбұрыш теңсіздігі	Неравенство треугольников	Triangle inequality

4. ШЕҢБЕР ЖӘНЕ САЛУ ЕСЕПТЕРІ

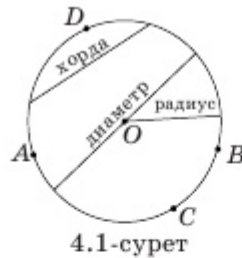
4.1. Шеңбер, дөңгелек, олардың элементтері мен бөліктері.
Центрлік бұрыш

4.1.1. Шеңбер және дөңгелек. Жазықтықтың берілген нүктесінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиынын *шеңбер* деп атайды. Берілген нүктені *шеңбердің центрі* деп, ал шеңбердің кез келген нүктесінен оның центріне дейінгі қашықтықты *шеңбердің радиусы* (R) деп атайды.

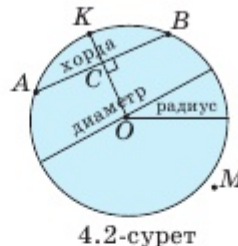
Шеңбердің екі нүктесін қосатын кесіндіні *хорда* деп, ал центр арқылы өтетін хорданы *шеңбердің диаметрі* (D) деп атайды (4.1-сурет). Әрбір диаметр екі радиустан құралады, сондықтан оның ұзындығы екі радиусқа тең: $D = 2R$.

Центрі O нүктесі болатын және радиусы R -ге тең шеңберді $\omega(O; R)$ деп белгілейді.

Шеңбер өзінде жатқан екі нүкте арқылы екі бөлікке бөлінген. Бұл бөліктердің әрқайсысы *шеңбердің доғасы* болады. Мысалы, 4.1-суретте шеңбер A және B нүктелері арқылы үлкен $\widehat{ADB}$ және кіші $\widehat{ACB}$ доғаларына бөлінген. Оларды сәйкесінше $\widehat{ADB}$ және $\widehat{ACB}$ деп белгілейді.



4.1-сурет



4.2-сурет

Егер теріс емес R саны мен O нүктесі берілсе, онда жазықтықтың кез келген A нүктесі үшін келесі қатынастардың тек біреуі ғана орындалады:

- $OA \leq R$;
- $OA > R$.

Анықтама бойынша $OA = R$ теңдігін қанағаттандыратын жазықтықтағы нүктелер жиынын шеңбер деп атадық.

1. Осы сияқты жазықтықтың $OA \leq R$ теңсіздігін қанағаттандыратын центрі O нүктесінде орналасқан, радиусы R -ге тең барлық нүктелер жиынын *дөңгелек* дейміз (4.2-сурет).

2. Егер $OA > R$ теңсіздігі орындалса, онда A нүктесін дөңгелектен *тысқары орналасқан* нүкте дейді.

Мысалы, A, B, C, K, O нүктелері – дөңгелекке тиісті нүктелер, ал M – дөңгелектен тысқары орналасқан нүкте.

Жалпы шеңберге қатысты элементтер дөңгелекке қатысты да сол атаумен аталады. Мысалы: дөңгелектің радиусы, диаметрі, хордасы және т.с.с.

Түзу мен шеңбердің өзара орналасуының үш жағдайы

1 Егер a түзуі $\omega(O; R)$ шеңберін қиып өтсе, онда шеңбер мен түзудің екі ортақ нүктесі болады. Шеңбердің екі нүктесі арқылы өтетін түзуді *қиюшы* деп атайды. 4.3, а-суретте a түзуі – қиюшы.

Бұл жағдайда шеңбер центрінен түзуге дейінгі қашықтық радиустан кіші:

$$OC = d < R.$$

2 Егер a түзуі $\omega(O; R)$ шеңберін 4.3, ә-суретте көрсетілгендей жанап өтсе, онда шеңбер мен түзудің бір ғана ортақ нүктесі болады.

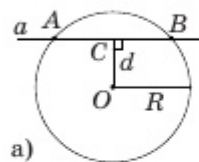
Бұл жағдайда шеңбер центрінен түзуге дейінгі қашықтық радиусқа тең:

$$OC = d = R.$$

Шеңбермен бір ғана ортақ нүктесі бар түзуді *жанама* деп, ал осы ортақ нүктені *жанасу нүктесі* деп атайды.

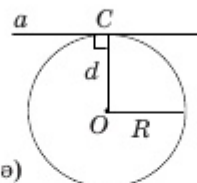
3 Егер a түзуі $\omega(O; R)$ шеңберін қимаса, онда шеңбер мен түзудің ортақ нүктесі болмайды (4.3, б-сурет).

Бұл жағдайда шеңбер центрінен түзуге дейінгі қашықтық радиустан артық: $OC = d > R$.



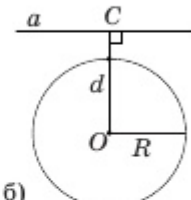
а)

$$\omega(O; R) \\ d = OC < R$$



ә)

$$\omega(O; R) \\ d = OC = R$$



б)

$$\omega(O; R) \\ d = OC > R$$

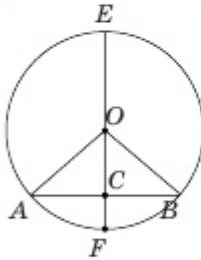
4.3 сурет

4.1.2. Шеңберге жүргізілген жанаманың қасиеті

Жанасу нүктесі шеңбер бойында жатқандықтан, оның центрге дейінгі қашықтығы радиусқа тең. Жанаманың өзге нүктелері шеңберден тысқары орналасқан (4.3, б-сурет).

Олай болса, OC -ның ұзындығы a жанамасынан шеңбер центріне дейінгі қашықтыққа тең, яғни $OC \perp a$. Сондықтан шеңберге жүргізілген жанама радиусқа перпендикуляр (4.3, ә-сурет).

Теорема 1. Хорданың ортасы арқылы өтетін диаметр оған перпендикуляр болады.



4.4-сурет

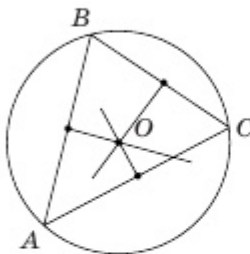
C нүктесі AB хордасының ортасы болсын. OC түзуі шеңберді E және F нүктелерінде қиып өтсін (4.4-сурет). $EF \perp AB$ екенін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. $\triangle ABO$ – теңбүйірлі, себебі $AO = BO$ – радиустар. Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеті бойынша OC AB табанына түсірілген медианасы әрі биіктігі болады, яғни $OC \perp AB$. Олай болса, $EF \perp AB$. ■

4.1.3. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер

Егер шеңбер үшбұрыштың барлық төбелері арқылы өтсе, онда бұл шеңбер **үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер** деп аталады. Үшбұрыш қабырғасының ортасы арқылы өтетін және оған перпендикуляр түзуді үшбұрыштың **орта перпендикулярлары** деп атайды.

Теорема 2. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың орта перпендикулярларының қиылысу нүктесі болады.



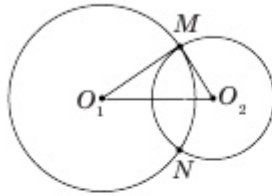
4.5-сурет

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі O болсын. Онда $\triangle ABC$ -ның қабырғалары осы шеңбердің хордалары болып табылады.

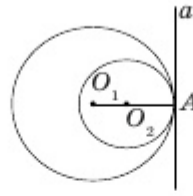
1-теорема бойынша үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярлары шеңбер диаметрлерінде жатады және бұл диаметрлер шеңбердің центрі арқылы өтеді (4.5-сурет). ■

Жалпы $\omega(O_1; R_1)$ және $\omega(O_2; R_2)$ екі шеңбер де үш түрлі жағдайда орналасуы мүмкін:

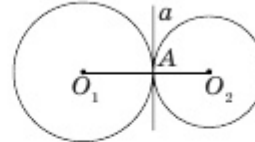
- ортақ екі нүктесі болуы мүмкін (4.6-сурет);
- бір ғана ортақ нүктесі болуы мүмкін (4.7, 4.8-суреттер);
- ортақ нүктелері болмауы мүмкін (4.9, 4.10-суреттер).



4.6-сурет



4.7-сурет



4.8-сурет

Екі шеңбердің өзара орналасуы

Центрлері O_1 , O_2 нүктелері, радиустары R_1 , R_2 -ге тең екі шеңбер берілсін: $\omega(O_1; R_1)$ және $\omega(O_2; R_2)$. $R_1 > R_2$ болсын.

1 Егер берілген екі шеңбер екі нүктеде қиылысатын болса (4.6-сурет), онда келесі теңсіздік орындалады:

$$R_1 - R_2 < O_1 O_2 < R_1 + R_2.$$

Шынында да, $O_1 M O_2$ үшбұрышынан келесі теңсіздікті аламыз:

$$O_1 O_2 < O_1 M + O_2 M, \text{ ал } O_1 M + O_2 M = R_1 + R_2.$$

Сонымен қатар, осы үшбұрыштан $O_1 M < O_1 O_2 + O_2 M$, яғни $R_1 < O_1 O_2 + R_2$ теңсіздігі алынады. Сондықтан

$$R_1 - R_2 < O_1 O_2.$$

2 Егер екі шеңбердің бір ғана A ортақ нүктесі болса (4.7, 4.8-суреттер), онда осы A нүктесі арқылы өтетін және $O_1 O_2$ түзуіне перпендикуляр болатын a түзуі осы шеңберлердің ортақ жанамасы болады (шеңбермен жалғыз ортақ нүктесі бар және радиусқа перпендикуляр түзу ретінде).

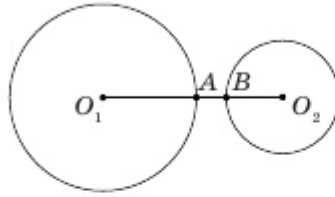
Егер екі шеңбердің жалғыз ортақ нүктесі бар болса, онда бұл шеңберді бір-бірімен **жанасады** деп айтады.

1) Егер шеңберлердің центрі ортақ жанаманың бір жағында орналасатын болса, онда бұл шеңберлерді **іштей жанасады** (4.7-сурет) деп аталады, яғни:

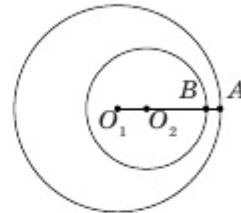
$$O_1 O_2 = R_1 - R_2.$$

2) Шеңберлер центрі ортақ жанаманың екі жағында жататын болса, онда шеңберлерді **сырттай жанасады** (4.8-сурет) деп айтады. Онда

$$O_1 O_2 = R_1 + R_2.$$



4.9-сурет



4.10-сурет

3 Берілген екі шеңбердің ортақ нүктелері жоқ делік. Бұл жағдайда:

1) шеңберлердің бірі екіншісінің *сыртқы аймағында* орналасады (4.9-сурет) яғни: $O_1O_2 > R_1 + R_2$.

2) шеңберлердің бірі екіншісінің *ішкі аймағында* орналасады (4.10-сурет) яғни: $O_1O_2 < R_1 - R_2$.

4.1.4. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер

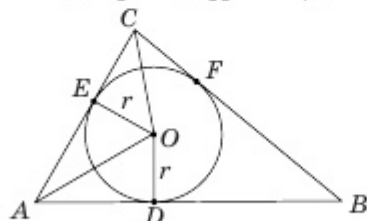
Үшбұрыштың барлық қабырғаларын жанайтын шеңберді *осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер* деп айтады (4.11-сурет).

Теорема 3. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер центрі үшбұрыш биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады.

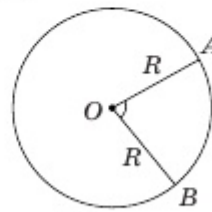
Дәлелдеуі. $\triangle ABC$ -на іштей сызылған шеңбер центрі O , ал қабырғаларымен жанасу нүктелері D , E және F болсын (4.11-сурет). $OD = OE$ (катеттері – шеңбер радиустары және AO гипотенузасы ортақ болғандықтан, $\triangle AOD = \triangle AOE$. Онда $\angle OAD = \angle OAE$, яғни үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің O центрі AO биссектрисасында жатыр.

Осы сияқты O нүктесі үшбұрыштың BO және CO -ға тең биссектрисаларында жататынын да дәлелдеуге болады. ■

$\omega(O; R)$ шеңбері бойынан A және B нүктелерін белгілейік. Төбесі шеңбердің центрі, ал қабырғалары шеңбер радиустары болатын бұрышты *шеңбердің центрлік бұрышы* дейді. AOB бұрышы – центрлік бұрыш (4.12-сурет).



4.11-сурет



4.12-сурет

AOB бұрышының өлшемі AB доғасының *градустық өлшемі* болады. A және B нүктелері шеңберді екі бөлікке бөледі. Бұл бөліктердің AOB центрлік бұрышымен шектелген бөлігі AB доғасы ретінде қарастырылады.



1. Шеңбер дегеніміз не? Шеңбердің центрі деп нені айтады? Радиусы деп нені айтады?
2. Хорда деп нені атайды? Қандай хорда диаметр болады?
3. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер деп нені айтады?
4. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер центрі жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.
5. Қандай түзуді шеңберге жанама дейді?
6. Екі шеңбердің іштей, сырттай жанасуын қалай түсінесіңдер?
7. Қандай шеңберді үшбұрышқа іштей сызылған деп айтады?
8. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер центрі жөніндегі теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.



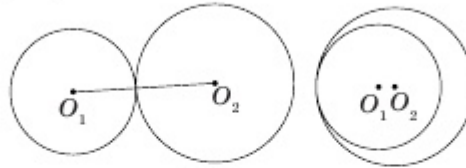
100 тг-нің не 50 тг-нің немесе өзге шаблонның көмегімен шеңбер сызып, оның центрін көз мөлшерімен анықтаңдар. Егер сызылған шеңбер центрі көрсетілмесе, онда центрдің орнын қалай табуға болатынын түсіндіріп көріңдер.

Жаттығулар

A

- 4.1. Шеңбер радиусы 2,5 см. Оның диаметрін табыңдар. Осы шеңбердің диаметрі 6 см болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 4.2. Дөңгелектің центрі арқылы өтпейтін хорда оның диаметрінен кіші болатынын көрсетіңдер.
- 4.3. Шеңбер мен кесінді берілген. Шеңбердің берілген кесіндіге тең хордасын салыңдар.
- 4.4. Центрі O нүктесінде болатын шеңбердің ішінде жататын A нүктесі берілген: 1) OA түзуі; 2) OA сәулесі; 3) OA кесіндісі шеңберді неше нүктеде қиып өтеді?
- 4.5. Радиустары 30 см және 40 см болатын екі шеңбер жанасады. Осы шеңберлер сырттай және іштей жанас-

қан жағдайда центрлердің арақашықтығын табындар (4.13-сурет).



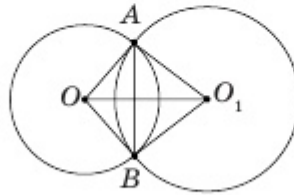
4.13-сурет

- 4.6. Егер центрлерінің арақашықтығы 60 см болса, онда радиустары 25 см және 50 см болатын шеңберлер жанасуы мүмкін бе?
- 4.7. Егер нүкте: 1) шеңберден тысқары; 2) шеңбердің бойында; 3) шеңбердің ішінде жатса, онда осы нүктеден шеңберге неше жанама жүргізуге болады?
- 4.8. Шеңбер мен түзу екі нүктеде жанасуы мүмкін бе?
- 4.9. $\omega(O_1; R_1)$ және $\omega(O_2; R_2)$ шеңберлері қалай орналасқан, егер: 1) $R_1 = 6$ см, $R_2 = 15$ см, $O_1 O_2 = 21$ см; 2) $R_1 = 12$ см, $R_2 = 14$ см, $O_1 O_2 = 8$ см; 3) $R_1 = 6$ см, $R_2 = 5$ см, $O_1 O_2 = 18$ см болса?
- 4.10. Егер шеңбердің диаметрі 16 см, ал центрден түзуге дейінгі қашықтық: 1) 7 см; 2) 8 см; 3) 9 см болса, түзу шеңберге қатысты қалай орналасады?
- 4.11. A , B және C нүктелері шеңберді AB , BC және CA тең үш доғаға бөледі. Осы доғалардың градусық өлшемдері неге тең?

В

- 4.12. A нүктесінен бір шеңберге AB және AC жанамалары жүргізілген. Мұнда B және C – жанасу нүктелері. $AB = AC$ теңдігін дәлелдеңдер.
- 4.13. Дөңгелектің бір нүктесінен диаметрге және радиусқа тең хордалар жүргізілген. Олардың арасындағы бұрышты табындар.
- 4.14. Дөңгелектің бір нүктесінен радиусқа тең хордалар жүргізілген. Олардың арасындағы бұрышты табындар.

- 4.15. Радиустары 3 см және 4 см болатын шеңберлер центрлерінің арақашықтығы 5 см. Бұл шеңберлердің ортақ нүктелері бар ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 4.16. Центрлері O және O_1 болатын шеңберлер A және B нүктелерінде қиылысқан. 1) $\triangle OAO_1 = \triangle BOO_1$; 2) $\triangle OAB$ және $\triangle O_1AB$ теңбүйірлі болатынын дәлелдеңдер (4.14-сурет).



4.14-сурет

- 4.17. Центрлері O және O_1 болатын шеңберлер A және B нүктелерінде қиылысқан. Егер әрбір шеңбер екіншісінің центрі арқылы өтсе, онда $\triangle AOB$ және $\triangle OAO_1$ бұрыштарын табыңдар.
- 4.18. Тең қабырғалы үшбұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің центрі беттесетінін дәлелдеңдер.
- 4.19. Радиустары 80 см және 60 см болатын шеңберлер жана­сады. Олардың іштей және сырттай жанасатын жағдайларында центрлерінің арақашықтығын табыңдар.
- 4.20. Радиустары тең үш шеңбердің әрқайсысы өзге екеуінің центрлері арқылы өтеді. Олардың центр тең қабырғалы үшбұрыштың төбелері болатынын дәлелдеңдер.
- 4.21. Шеңбердің тең хордалары оның центрінен бірдей қашықтықта жататынын көрсетіңдер.
- 4.22. Егер шеңбердің екі хордасы центрден бірдей қашықтықта жатса, онда бұл хордалар тең болатынын көрсетіңдер.
- 4.23. 1) Берілген түзуге параллель; 2) берілген түзуге перпендикуляр болатын шеңбер жанамасын қалай жүргізуге болады?

- 4.24. A нүктесінен жүргізілген ұзындығы радиусқа тең хорда A нүктесінде шеңберге жүргізілген жанамамен қандай бұрыш жасайды?
- 4.25. Ұзындығы радиусқа тең хорданың ұштарынан жүргізілген жанамалар қандай бұрышпен қиылысады?
- 4.26. Радиустары 4 см және 6 см екі шеңбердің центрлері ортақ (оларды *концентрлі шеңберлер* деп атайды). Осы шеңберлердің бір-бірінен ең қашық орналасқан нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.
- 4.27. AB доғасы шеңбер ұзындығының $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең болса, AOB центрлік бұрышы неге тең?
- 4.28. Градустық өлшемі 90° -қа тең центрлік бұрыштың $\frac{1}{15}$ бөлігіндегі доғаның шамасы неге тең?

С

- 4.29. Шеңбердің центрі көрсетілмесе, оның доғасын қалай тең екіге бөлуге болады?
- 4.30. 1) A, B, C нүктелері бір түзудің бойында, ал O бұл түзуден тысқары жатыр. Табандары AB және BC болатын AOB және BOC үшбұрыштары теңбүйірлі болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды түсіндіріңдер.
2) Шеңбер мен түзу 2-ден көп нүктеде қиылысуы мүмкін бе?
- 4.31*. 1) A нүктесінен бір шеңберге AB, AC жанамалары жүргізілген. B, C – жанасу нүктелері. $AB = AC$ теңдігін дәлелдеңдер.
2) Бір нүктеден шеңберге екіден көп жанама жүргізуге болмайтынын дәлелдеңдер.
- 4.32*. ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбер оның қабырғаларын A_1, B_1, C_1 нүктелерінде жанайды. Онда $AC_1 = \frac{1}{2} (AB + AC - BC)$ теңдігін дәлелдеңдер.

4.2. Геометрияның салу есептері

4.2.1. Қарапайым салу есептері

1-мысал. Берілген бұрышқа тең бұрыш салу.

Шешуі. Төбесі O нүктесін болатын (pq) бұрышы берілген. Циркульді және сызғышты пайдаланып, берілген (pq) бұрышына тең BAC бұрышын салу қажет. Ол үшін:

1. O нүктесінен бастап кез келген радиустағы шеңбер жүргіземіз. Бұл шеңбердің p және q түзулерімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше P және Q деп белгілейік (4.15, а-сурет).

2. Бастапқы нүктесі A болатын кез келген a сәулесін жүргіземіз.

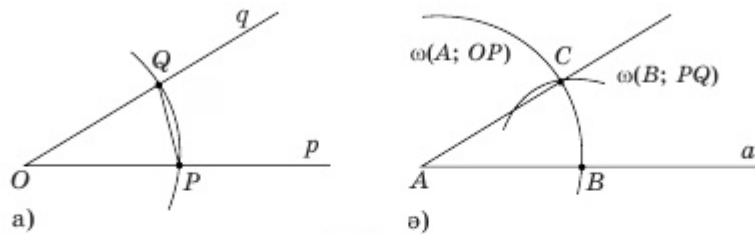
3. Центрі A нүктесі, радиусы OP -ға тең $\omega(A; OP)$ шеңберін жүргіземіз.

4. Центрі B нүктесі, радиусы PQ -ға тең $\omega(B; PQ)$ шеңберін жүргіземіз.

5. Осы шеңберлердің қиылысу нүктесін C деп белгілейік: $\omega(A; OP) \cap \omega(B; PQ) = C$ (4.15, ә-сурет).

6. AC сәулесін жүргіземіз. Сонда $\angle BAC$ – (pq) бұрышына тең бізге қажетті бұрыш.

Шынында да, $\triangle OPQ = \triangle ABC$, өйткені салуымыз бойынша $AB = OP$, $AC = OQ$, $BC = PQ$ (үшбұрыштар теңдігінің III белгісі бойынша). Олай болса, $\angle POQ = \angle BAC$.



4.15-сурет

2-мысал. Берілген бұрыштың биссектрисасын салу.

Шешуі. Төбесі A нүктесі болатын (ab) бұрышы берілсін.

1. Центрі A нүктесі, радиусы R -ге тең шеңбер жүргіземіз. R – кез келген оң сан. Шеңбердің бұрыш қабырғаларымен қиылысу нүктелерін B және C деп белгілейік: $(B = a \cap \omega(A; R))$ және $C = b \cap \omega(A; R)$.

2. Центрлері B және C нүктелері болатын шеңберлер сыза-мыз. Олардың қиылысу нүктесін D деп белгілейміз.

3. AD сәулесін жүргіземіз. Бұл сәуле (ab) бұрышының биссектрисасы болады (4.16-сурет).

Шынында да, үш қабырғасы бойынша $\triangle ABD = \triangle ACD$ ($AC = AB = R$, $BD = CD = R$, AD – ортақ қабырға). Үшбұрыштар теңдігінен $\angle BAD = \angle CAD$. Демек, AD сәулесі $\angle BAC$ -ын тең екіге бөледі. Олай болса, AD – бізге қажет биссектриса.

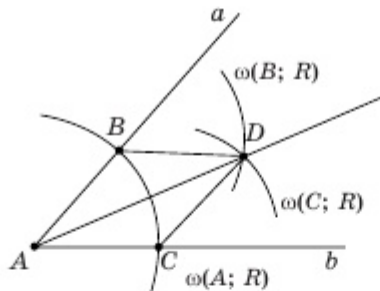
3-мысал. Кесіндіні қақ бөлу.

Шешуі. AB кесіндісі берілген.

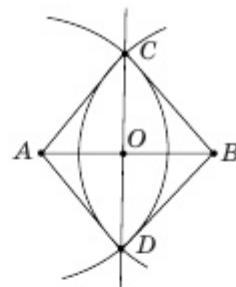
1. Центрлері A және B нүктелері, радиустары R ($R > \frac{AB}{2}$) болатын шеңберлер жүргіземіз (4.17-сурет). Бұл шеңберлер C және D нүктелерінде қиылысады.

2. CD түзуін жүргіземіз. O нүктесі – AB кесіндісінің ортасы, яғни $OA = OB$.

Шынында да, $\triangle ACD$ және $\triangle BCD$ – теңбүйірлі және үш қабырғасы бойынша өзара тең ($AC = BC = R$, $AD = BD = R$, CD – ортақ қабырға). Үшбұрыштар теңдігінен $\angle ACD = \angle BCD$ шығады, яғни CO – $\triangle ABC$ теңбүйірлі үшбұрышының биссектрисасы. Олай болса, CO осы үшбұрыштың әрі медианасы. Онда $OA = BO$.



4.16-сурет



4.17-сурет

4-мысал. Берілген O нүктесі арқылы берілген a түзуіне перпендикуляр түзу жүргізу қажет.

Шешуі. Екі жағдайды қарастырамыз: 1) $O \in a$; 2) $O \notin a$.

1-жағдай. $O \in a$ (4.18-сурет).

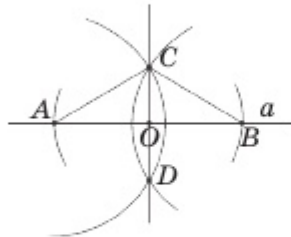
1. Центрі O нүктесі, радиусы R -ге тең кез келген шеңбер сызайық. Шеңбердің a түзуімен қиылысуын A және B деп белгілейік.

2. Центрлері A және B нүктелері, радиустары R_1 ($R_1 > R$) болатын шеңберлер сызамыз.

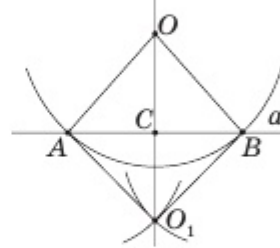
3. Шеңберлердің қиылысу нүктесін C деп белгілейік.

4. OC түзуін жүргіземіз және $OC \perp a$.

Шынында да, үш қабырғасы бойынша $\triangle AOC = \triangle BOC$ ($OA = OB = R$, $AC = BC = R$, OC – ортақ қабырға). Үшбұрыштар теңдігінен $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$. Демек, $OC \perp a$.



4.18-сурет



4.19-сурет

2-жағдай: $O \notin a$ (4.19-сурет).

1. a түзуін A және B нүктелерінде қиятын центрі O нүктесі, радиусы R -ға тең шеңбер жүргіземіз.

2. Центрлері A және B нүктелері, радиустары OA және OB болатын екі шеңбер сызамыз.

3. Шеңберлердің қиылысу нүктесін O_1 деп белгілейік.

4. OO_1 түзуін жүргіземіз, ол a түзуіне перпендикуляр.

Шынында да, үш қабырғасы бойынша $\triangle AOB = \triangle AO_1B$ ($OA = OB = AO_1 = BO_1 = R$, OO_1 – ортақ қабырға). Үшбұрыштар теңдігінен $\angle AOO_1 = \angle BOO_1$. A және B нүктелері a түзуінде жатқандықтан, OO_1 түзуі AB түзуінің орта перпендикуляры болады. Демек, $OO_1 \perp a$.

4.2.2. Үш элементі бойынша үшбұрыш салу

5-мысал. Екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы бойынша үшбұрыш салу.

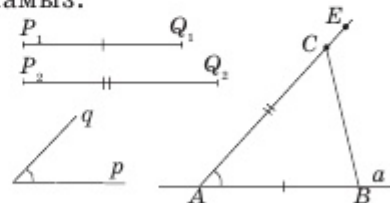
Шешуі. P_1Q_1 , P_2Q_2 кесінділері мен (pq) бұрышы берілген. $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $\angle A = \angle(pq)$ болатындай ABC үшбұрышын салайық.

1. a түзуін салайық. Циркульді пайдаланып, оның бойынан $AB = P_1Q_1$ болатындай A және B нүктелерін аламыз.

2. $\angle BAE = \angle(pq)$ бұрышын саламыз.

3. AE сәулесінен $AC = P_2Q_2$ болатындай C нүктесін аламыз.

4. B және C нүктелерін түзу сызықпен қосамыз. Сонда $\triangle ABC$ бізге қажетті үшбұрыш шығады (4.20-сурет).

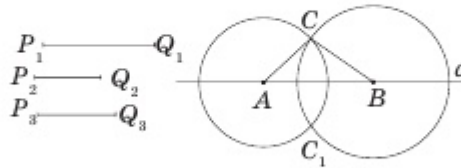


4.20-сурет

Шынында да, салуымыз бойынша $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$ және $\angle BAC = \angle(pq)$.

6-мысал. Үш қабырғасы бойынша үшбұрыш салу.

Шешуі. P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 кесінділері берілген (4.21-сурет). $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $BC = P_3Q_3$ болатындай ABC үшбұрышын салу қажет.



4.21-сурет

1. a түзуінің бойына $AB = P_1Q_1$ кесіндісін өлшеп саламыз.
2. Центрлері A , B нүктелері, радиустары P_2Q_2 және P_3Q_3 болатын екі шеңбер сызамыз: $\omega(A; P_2Q_2)$; $\omega(B; P_3Q_3)$.
3. Шеңберлердің қиылысу нүктелерінің бірін C деп белгілейміз.

4. C және B нүктелерін түзу сызықпен қосамыз. Сонда ABC бізге қажет үшбұрыш салынады.

Шынында да, салуымыз бойынша $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $BC = P_3Q_3$. Шеңберлер екі нүктеде (C , C_1) қиылысатындықтан, есептің екінші шешуі де болады, яғни $\triangle ABC_1$ да есеп шартын қанағаттандырады. Екінші жағынан, кез келген үш кесінді бойынша үшбұрыш салу әрқашан мүмкін бола бермейді.

Үшбұрыш салынуы үшін берілген үш кесіндінің кез келгені қалған екеуінің қосындысынан кіші болуы қажет.

4.2.3. Салу есептері

Іс-әрекеттері сызба жұмыстарымен тығыз байланысты мамандық иелері геометрияның салу есептерін жиі қолданады. Мысалы: сызушылар, сәулетшілер, конструкторлар, геодезистер, штурмандар, ағаш ұсталары және т.с.с.

Жоғарыда біз қарапайым салу есептері қалай орындалатынын көрсеттік. Енді одан күрделірек салу есептерін қарастырамыз.

Салу есептерінде қандай да бір берілген шартты қанағаттандыратындай етіп, жазықтықта нүктенің (нүктелердің) орнын табу керек.

Нүктенің геометриялық орны деп берілген шартты қанағаттандыратын жазықтықтағы барлық нүктелер жиынын айтады. Егер салу жұмыстарына қандай құралдарды қолдану қажеттігі көрсетілмесе, онда сызғышты және циркульді пайдаланады.

Салу есептерін әдетте кезеңдерге бөліп орындайды:

I. Талдау кезеңінде есепті шешу жолдары іздестіріледі.

II. Салу жұмыстары рет-ретімен орындалады.

III. Дәлелдеу кезеңінде екінші кезең нәтижесінде салынған фигураның шынымен есеп шартын қанағаттандыратындығы көрсетіледі.

IV. Зерттеу кезеңі өте күрделі салу есептерінде қолданылады. Мұнда салу есебінің шешуі бар және жалғыз болатындығы жөніндегі сұрақтар қарастырылады.

7-мысал. A, B, O нүктелері берілген. A және B нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан және O нүктесінен берілген d қашықтықта болатын X нүктесін салу қажет.

Шешуі. **I. Талдау.** Бізге қажет X нүктесі екі шартты қанағаттандырады: а) бұл нүкте A және B нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан; ө) O нүктесінен берілген d қашықтықта орналасқан.

а) шартын қанағаттандыратын нүктелер жиыны AB кесіндісінің орта перпендикуляры болады; ө) шартын қанағаттандыратын нүктелер жиыны $\omega(O; R)$ шеңбері болады ($d = R$). Онда бізге қажет нүкте – осы шеңбер мен AB -нің орта перпендикулярының қиылысу нүктесі.

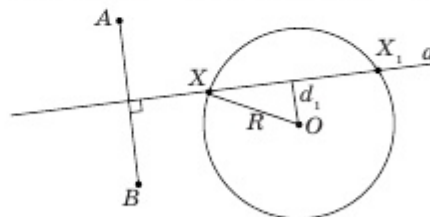
II. Салу. 1) AB кесіндісінің орта перпендикуляры – a түзуін жүргіземіз (4.22-сурет).

2) $\omega(O; R)$ шеңберін жүргіземіз;

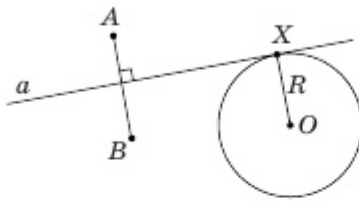
3) a түзуі мен $\omega(O; R)$ шеңберінің қиылысу нүктесін анықтаймыз, ол – X нүктесі. Табылған X – бізге қажет нүкте.

III. Дәлелдеу. Салуымыз бойынша $AX = BX$ және $OX = R$. Олай болса, табылған X нүктесі есеп шартын қанағаттандырады.

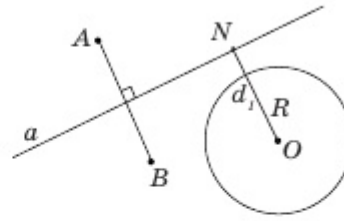
IV. Зерттеу. O нүктесінен a орта перпендикулярына дейінгі қашықтықты d_1 деп белгілейік (4.22-сурет).



4.22-сурет



4.23-сурет



4.24-сурет

- Егер $d_1 < R$ болса, онда a түзуі мен $\omega(O; R)$ шеңбері X және X_1 нүктелерінде қиылысады (4.22-сурет), яғни есептің екі шешімі бар.
- Егер $d_1 = R$ болса, онда есептің жалғыз шешімі бар (4.23-сурет).
- Егер $d_1 = ON > R$ болса, онда есептің шешуі жоқ (4.24-сурет).



1. Берілген бұрышқа тең бұрышты қалай салады?
2. Бұрыштың биссектрисасын қалай жүргізеді?
3. Кесіндіні қалай қақ бөлуге болады?
4. Берілген нүкте арқылы өтетін және берілген түзуге перпендикуляр түзуді қалай жүргізеді?
5. Үшбұрышты үш элементі: а) екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы бойынша; ө) үш қабырғасы бойынша; б) бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы бойынша қалай салады?
6. Салу есебі дегеніміз не? Талдау, салу, дәлелдеу және зерттеу кезеңдерінің мәні қандай?



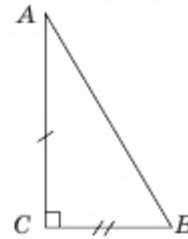
1. Қабырғасы 5 см болатын тең қабырғалы үшбұрыш салыңдар.
2. Бүйір қабырғасы 6 см және төбесіндегі бұрышы: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° болатын теңбүйірлі үшбұрыш салыңдар.

Жаттығулар

А

- 4.33. A және B нүктелері берілген. Осы екі нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиыны қандай фигура болады?
- 4.34. Берілген нүктеден берілген қашықтықта орналасқан нүктелер жиыны қандай фигура болады?
- 4.35. Берілген нүкте арқылы өтетін өзара тең шеңберлер центрі қандай фигура құрайды?

- 4.36. Берілген екі нүкте арқылы өтетін шеңберлер центрі болатын нүктелер жиынын анықтаңдар.
- 4.37. Берілген түзуден берілген қашықтықта орналасқан нүктелер жиынын анықтаңдар.
- 4.38. Берілген өзара параллель екі түзуден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиынын табыңдар.
- 4.39. PQ кесіндісі мен (hk) бұрышы берілген. Төмендегі шарттар орындалатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.
- 1) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle(hk)$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle(hk)$;
 - 2) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle(hk)$, $\angle BAC = \frac{1}{4}\angle(hk)$.
- 4.40. (hk) және (h_1k_1) бұрыштары мен PQ кесіндісі берілген. $AB = PQ$, $\angle A = \angle(hk)$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle(h_1k_1)$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.
- 4.41. 1) Екі катеті; 2) катеті мен іргелес сүйір бұрышы бойынша тікбұрышты үшбұрыш салыңдар (4.25-сурет).
- 4.42. 1) Бүйір қабырғасы мен табанына қарсы жатқан бұрышы; 2) табаны мен табанындағы бұрышы; 3) бүйір қабырғасы мен табанындағы бұрышы; 4) табаны мен бүйір қабырғасы; 5) табаны мен табанына жүргізілген медианасы бойынша теңбүйірлі үшбұрыш салыңдар.
- 4.43. Ұзындықтары a , b және c -ға тең кесінділер берілген. $AB = a$, $BC = b$, $AC = 2c$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.
- 4.44. Ұзындықтары a -ға, b -ға және c -ға тең кесінділер берілген. $AB = 2a$, $BC = b$, $AC = c$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.

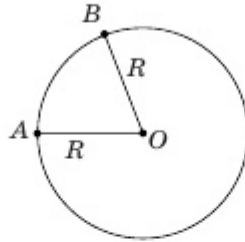


4.25-сурет

- 4.45.** Табаны мен табанына түсірілген биіктігі бойынша теңбүйірлі үшбұрыш салыңдар.
- 4.46.** 1) Гипотенузасы мен сүйір бұрышы; 2) гипотенузасы мен катеті; 3) катеті мен оған қарсы жатқан сүйір бұрышы бойынша тікбұрышты үшбұрыш салыңдар.
- 4.47.** Екі қабырғасы мен олардың біреуіне жүргізілген медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 4.48.** Катеті және гипотенузасы мен екінші катетінің қосындысы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 4.49.** Екі қабырғасы мен олардың біреуіне түсірілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 4.50.** Берілген түзуден берілген қашықтықта және берілген екінші түзу бойында жататын нүктені анықтаңдар.
- 4.51.** Екі қабырғасы мен үшінші қабырғасына түсірілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 4.52.** Берілген екі нүктеден бірдей қашықтықта және берілген түзде жататын нүктенің орнын табыңдар.
- 4.53.** Берілген бұрыш қабырғаларын жанайтын және оның бір қабырғасын берілген нүктеде жанайтын шеңбер салыңдар.
- 4.54.** Берілген нүктеде берілген шеңберді жанайтын жанама жүргізіңдер.

В

- 4.55.** Центрі берілген түзде жататын, берілген нүкте арқылы өтетін, берілген радиусы бойынша шеңбер салыңдар.



4.26-сурет

- 4.56. Берілген екі нүкте арқылы өтетін, радиусы берілген шеңбер салыңдар (4.26-сурет).
- 4.57. A, B нүктелері, a түзуі және PQ кесіндісі берілген. $C \in a$, $AC = PQ$ болатындай, ABC үшбұрышын салыңдар.
- 4.58. Шеңбер, A, B нүктелері және PQ кесіндісі берілген. C төбесі берілген шеңберде жататындай және $AC = PQ$ болатындай етіп, ABC үшбұрышын салыңдар.
- 4.59. $\triangle ABC$ -ның BC қабырғасынан A және C төбелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүктені анықтаңдар.
- 4.60. Циркульді және сызғышты пайдаланып, берілген кесіндіні тең төрт бөлікке бөліңдер.
- 4.61. Берілген түзу бойынан берілген екі нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктені анықтаңдар.
- 4.62. A, B, C, D нүктелері берілген. A және B нүктелерінен бірдей қашықтықта және C мен D нүктелерінен де бірдей қашықтықта орналасқан X нүктесін табыңдар.
- 4.63. Қабырғасы, оған іргелес бұрышы және өзге екі қабырғасының айырмасы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 4.64. Қабырғасы, оған іргелес бұрышы және өзге екі қабырғасының қосындысы бойынша үшбұрыш салыңдар.

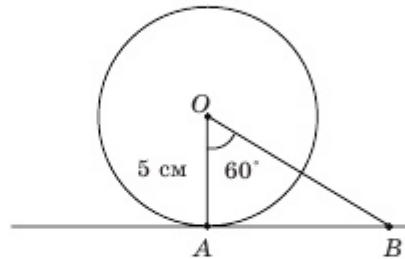
- 4.65.** Катеті және гипотенузасына түсірілген биіктігі бойынша тікбұрышты үшбұрыш салыңдар.
- 4.66.** A – берілген бұрыштың ішкі нүктесі. A нүктесі арқылы өтетін және берілген бұрыш қабырғаларынан тең кесінділер қиып өтетін түзу жүргізіңдер.
- 4.67.** AB кесіндісі мен a түзуі берілген. a түзуіне параллель және a түзуінен AB қашықтығында өтетін m түзуін жүргізіңдер.
- 4.68.** Берілген үш нүкте арқылы өтетін шеңбер салыңдар. Есептің шешуі үнемі табыла бере ме?
- 4.69.** Циркульді және сызғышты пайдаланып: 1) 30° ; 2) 60° ; 3) 15° ; 4) 135° ; 5) 75° -қа тең бұрыш салыңдар.

C

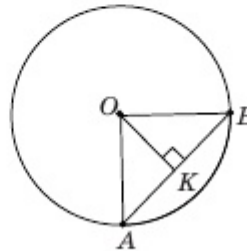
- 4.70.** Қабырғасы, оған қарсы жатқан бұрышы және осы бұрыш төбесінен түсірілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 4.71.** ABC тең қабырғалы үшбұрышы мен оның AC қабырғасынан B_1 нүктесі берілген. BC және AB қабырғаларынан $A_1B_1C_1$ тең қабырғалы үшбұрыш болатындай етіп, сәйкес A_1 және C_1 нүктелерін табыңдар.
- 4.72*.** Қабырғасы, осы қабырғаға жүргізілген медианасы мен биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 4.73.** Бұрышы мен осы бұрыш төбесінен жүргізілген биіктігі және биссектрисасы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 4.74*.** A бұрышы тік болатын ABC үшбұрышы берілген. BC түзуінен AK қашықтығында жататындай AB қабырғасынан K нүктесін табыңдар.

**«ШЕҢБЕР ЖӘНЕ САЛУ ЕСЕПТЕРІ» БӨЛІМІ БОЙЫНША
ҚОСЫМША ЕСЕПТЕР**

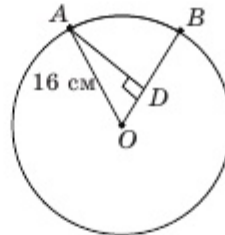
1. Табу керек: OB .



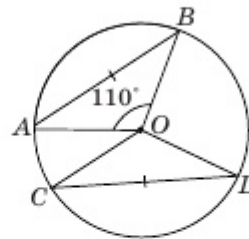
2. Берілгені:
 $\widehat{AB} = 90^\circ$,
 $AB = 8$ см.
 Табу керек: OK .



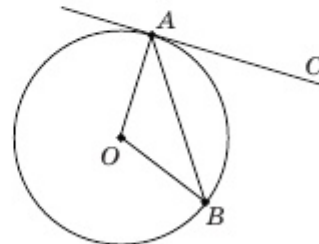
3. Берілгені:
 $\widehat{AB} = 60^\circ$,
 $AO = 16$ см.
 Табу керек: BD .



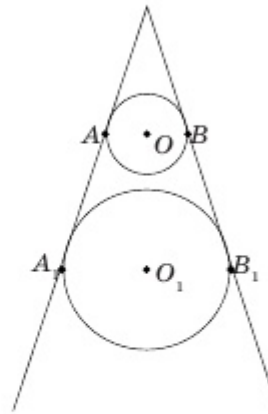
4. Берілгені:
 $AB = CD$.
 Табу керек: $\widehat{CD}$.



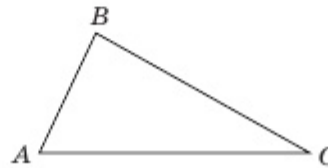
5. Дәлелдеу керек:
 $\angle AOB = 2\angle CAB$.



6. Дәлелдеу керек: $AA_1 = BB_1$.



7. ABC үшбұрышының AC қабырғасына түсірілген биіктігін салыңдар.



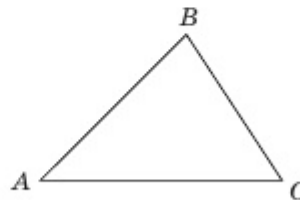
8. Берілген бұрышты теңдей 4 бөлікке бөліңдер.



9. Берілген кесіндінің $\frac{3}{4}$ бөлігіне тең кесінді салыңдар.



10. ABC үшбұрышының AB қабырғасына жүргізілген биссектрисасын салыңдар.

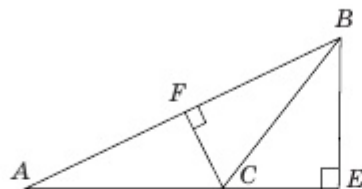


Терминдер сөздігі

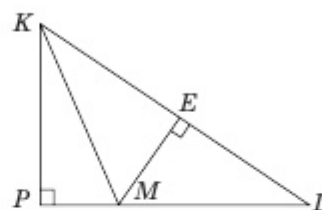
Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Шеңбер	Окружность	Circumference
Дөңгелек	Круг	Circle
Радиус	Радиус	Radius
Диаметр	Диаметр	Diameter
Хорда	Хорда	Chord
Центрлік бұрыш	Центральный угол	Central angle
Доға	Дуга	Arc
Жанама	Касательная	Tangent
Жанасу нүктесі	Точка касания	Point of contact
Орта перпендикуляр	Срединный перпендикуляр	Midical perpendicular
Сырттай сызылған шеңбер	Описанная окружность	Circumscribed circle
Іштей сызылған шеңбер	Вписанная окружность	Inscribed circle
Іштей жанасқан шеңберлер	Внутреннее касание окружностей	Internal tangency of circles
Сырттай жанасқан шеңберлер	Внешнее касание окружностей	External tangency of circles
Салу есептері	Задачи на построение	Construction problems

5. 7-СЫНЫП МАТЕРИАЛЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

- 5.1. $AB = 8$ см, K нүктесі AB кесіндісінің ортасы болатынын ескере отырып, AB түзуінен $AX + BX + KX = 9$ см болатындай етіп, барлық X нүктелерін табыңдар. Бұл нүктелерді суреттен көрсетіңдер.
- 5.2. $AB = 8$ см, K нүктесі AB кесіндісінің ортасы екенін біле отырып, AB түзуінен $AX + BX + KX$ қосындысы 15 см болатындай барлық X нүктелерін табыңдар. Бұл нүктелерді суреттен көрсетіңдер.
- 5.3. 5.1-суретте BE және CF кесінділері – ABC үшбұрышының биіктіктері. Сызғышты ғана пайдаланып, үшбұрыштың AX биіктігін салыңдар. $AX=BE$, $CX=CF$ және $AC=17$ дм болса, BC кесіндісінің ұзындығын табыңдар.
- 5.4. 5.2-суретте KP және ME – KML үшбұрышының биіктіктері. Сызғышты ғана пайдаланып, үшбұрыштың LX биіктігін салыңдар. Егер үшбұрыштың $KP = LX$, $MP = MX$ және $\angle PKM = 27^\circ$ болса, онда XLM бұрышын табыңдар.



5.1-сурет



5.2-сурет

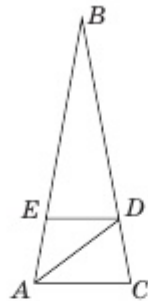
- 5.5. 1) Төбесі A нүктесінде болатын бұрыштың бір қабырғасынан D және B нүктелері, ал екінші қабырғасынан C және E нүктелері $AD = AC = 3$ см, $AB = AE = 4$ см болатындай етіп алынған.
- а) $BC = DE$;
- ә) $KB = KE$ теңдіктерін дәлелдеңдер. $K = BC \cap ED$.
- 2) $\triangle ABC$ және $\triangle A_1B_1C_1$ – табандары сәйкес AC және A_1C_1

болатын теңбүйірлі үшбұрыштар, N және N_1 – сәйкес BC және B_1C_1 қабырғаларының орталары, $AB = A_1B_1$, $AN = A_1N_1$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелдеңдер.

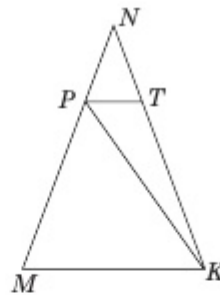
- 5.6. $\triangle ABC$ және $\triangle A_1B_1C_1$ – табандары AC және A_1C_1 болатын теңбүйірлі үшбұрыштар. K және K_1 нүктелері – BC және B_1C_1 қабырғаларының орталары, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$. $\triangle ABK = \triangle A_1B_1K_1$ теңдігін дәлелдеңдер.

- 5.7. 5.3-суретте $AB = BC$, $ED = AE$, $\angle C = 80^\circ$, $\angle DAC = 40^\circ$. ED және AC түзулері параллель болатынын дәлелдеңдер. $\angle BED$ -ын табыңдар.

- 5.8. 5.4-суретте $PN = NT$, PK – MPT бұрышының биссектрисасы. $\angle NPT = 70^\circ$, $\angle PKM = 55^\circ$. PT және MK түзулерінің параллель болатынын дәлелдеңдер. $\angle PKT$ -ын табыңдар.



5.3-сурет



5.4-сурет

- 5.9*. A және B елді мекендері түзу тас жолдың бір жақ бөлігінде орналасқан. $AC + BC$ қосындысы ең кіші мәнге ие болатындай етіп, тас жол бойының қай нүктесінен C аялдмасын жасау қажет?

- 5.10*. Егер X нүктесі ABC үшбұрышының ішінде жатса, онда $XB + XC < AB + BC$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңдер.

- 5.11.** Теңбүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 120° , ал табаны 10 см. Бүйір қабырғасына түсірілген биіктігін табыңдар.
- 5.12.** Теңбүйірлі үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының бірі 60° , ал бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі 17 см. Үшбұрыштың табанын анықтаңдар.
- 5.13.** Егер үшбұрыштың бір төбесінен жүргізілген медианасы осы төбеге қарсы жатқан қабырғаның жартысынан үлкен, тең немесе кіші болса, онда бұл төбедегі бұрыш сәйкесінше сүйір, тік немесе доғал болатынын дәлелдеңдер.
- 5.14.** Табаны BC болатын ABC теңбүйірлі үшбұрышының ішінен N нүктесі $\angle NBC = 30^\circ$, $\angle NCB = 10^\circ$ болатындай етіп алынған. Егер $\angle BAC = 80^\circ$ болса, онда ANC бұрышын табыңдар.
- 5.15.** Үштары үшбұрыш қабырғаларында орналасқан кез келген кесінді осы үшбұрыштың ең үлкен қабырғасынан кіші болатынын дәлелдеңдер.
- 5.16.** Егер BB_1 кесіндісі ABC үшбұрышының биссектрисасы болса, онда $BA > B_1A$ және $BC > B_1C$ теңсіздіктерін дәлелдеңдер.
- 5.17.** A және B нүктелері a түзуінің екі жағында орналасқан. a түзуіне түсірілген AP және BN перпендикулярлары өзара тең. AB және PN кесінділері K нүктесінде қиылысады. K нүктесі осы кесінділердің әрқайсысын тең бөліктерге бөлетінін дәлелдеңдер.
- 5.18.** A және B нүктелері a түзуінің бір жағында орналасқан. a түзуіне түсірілген AN және BK перпендикулярлары өзара тең. AK мен BN кесінділері O нүктесінде қиылысады. O нүктесі A , N , K , B нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқанын дәлелдеңдер.

- 5.19. Қабырғалары әртүрлі үшбұрышта биссектрисаның табаны осы төбеде жүргізілген медиана мен биіктік табандары арасында жататынын дәлелдеңдер.
- 5.20. Катеттері өзара тең емес тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышының биссектрисасы осы төбеде жүргізілген медиана мен биіктіктің арасындағы бұрыштың да биссектрисасы болатынын дәлелдеңдер.
- 5.21. Үшбұрыштың бір бұрышының төбесінен жүргізілген медиана мен биіктік осы бұрышты тең үш бөлікке бөледі, осы үшбұрыштың тікбұрышты екенін дәлелдеңдер.
- 5.22. ABC үшбұрышының AA_1 биіктігі BC қабырғасынан кіші емес, ал BB_1 биіктігі AC қабырғасынан кіші емес. ABC үшбұрышының тікбұрышты әрі теңбүйірлі үшбұрыш екенін дәлелдеңдер.
- 5.23*. Берілген қабырғасы, оған іргелес бұрышы және өзге екі қабырғасының қосындысы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 5.24*. Қабырғасы, оған түсірілген биіктігі және екі қабырғасының біріне түсірілген медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 5.25*. Екі қабырғасы мен үшінші қабырғасына түсірілген медианасы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 5.26. BC қабырғасы, BN медианасы және BH биіктігі бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.
- 5.27. AC және BC қабырғалары BN медианасы бойынша ABC үшбұрышын салыңдар.
- 5.28. B сүйір бұрышы мен BD биссектрисасы бойынша ABC тікбұрышты үшбұрышын салыңдар.

- 5.29. Берілген шеңбер бойынан берілген екі қиылысушы түзулерден бірдей қашықтықта жататын нүктені табыңдар. Есептің неше шешуі болуы мүмкін?
- 5.30. Бір нүктеден өтпейтін және қос-қостан қиылысатын үш түзу берілген. Осы түзулерден бірдей қашықтықта орналасатын нүктені салыңдар. Есептің неше шешуі бар?
- 5.31. Центрі O болатын шеңбер және одан тысқары A нүктесі берілген. A нүктесі арқылы шеңберді B және C нүктелерінде қиятын және $AB = BC$ теңдігі орындалатындай түзу жүргізіңдер.
- 5.32. Периметрі, бір бұрышы және басқа бір бұрышының төбесінен жүргізілген биіктігі бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 5.33. Периметрі мен екі бұрышы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 5.34*. Қабырғасы, осы қабырғаға іргелес екі бұрышының айырмасы және өзге екі қабырғасының қосындысы бойынша үшбұрыш салыңдар.
- 5.35*. Берілген екі шеңберге ортақ жанама жүргізіңдер.

БӨЛІМДЕР БОЙЫНША ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫ

Планиметрияның алғашқы түсініктері мен аксиомалары

1. D нүктесі AC кесіндісі бойында орналасқан. $AD = 4$ см, $DC = 2$ см. AC неге тең?
A) 2 см B) 4 см C) 6 см D) 8 см
2. Берілген геометриялық фигуралардың қайсысы «бастапқы» (анықталмайтын) ұғымға жатпайды?
A) Нүкте B) Түзу C) Жазықтық D) Кесінді
3. K нүктесі MN кесіндісінің бойында жатыр. M , N , K нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің ортасында орналасқан?
A) M B) N C) K D) Дұрыс жауабы жоқ.
4. YM сәулесі c түзуін қиып өтеді. YN сәулесі де c түзуін қиып өтеді. MN кесіндісі c түзуін қия ма?
A) Ия, әрқашан қияды. B) Қиюы мүмкін.
C) Ешқашан қимайды. D) Дұрыс жауабы жоқ.
5. Екі түзу қиылысқанда пайда болған бұрыштардың бірі сүйір. Қалған бұрыштары қандай?
A) Сүйір және тік. B) Сүйір және доғал.
C) Барлығы сүйір. D) Дұрыс жауабы жоқ.
6. Екі түзу қиылысқанда пайда болған вертикаль бұрыштардың бірі 90° -қа тең. Қалған үш бұрыштың шамасы қандай?
A) Барлығы 90° B) 45°
C) 90° , 90° және 180° D) Екеуі 45° , біреуі 90°
7. a және b түзулері арасындағы бұрыш 143° , ал a және c сәулелерінің арасындағы бұрыш b мен c -нің арасындағы бұрыштан 29° -қа кем. Егер c сәулесі a мен b -нің арасында орналасса, $\angle(bc)$ -ын табыңдар.
A) 59° B) 114° C) 57° D) 86°

8. Әрбір үшеуі бір түзу бойында жатпайтын 6 нүктенің әрбір екеуі арқылы өтетіндей барлығы неше түзу жүргізуге болады?
 A) 15 B) 12 C) 6 D) 30
9. $\angle BOD$ және $\angle COD$ – сыбайлас бұрыштар. OE – BOD бұрышының биссектрисасы. Ал COD бұрышы DOE бұрышынан 21° -қа үлкен. BOE бұрышын табыңдар.
 A) 67° B) 74° C) 46° D) 53°
10. MN және PK түзулері E нүктесінде қиылысады; EC – $\angle MEP$ -ның биссектрисасы, $\angle CEK = 137^\circ$. $\angle KEM$ -ы неге тең?
 A) 108° B) 84° C) 94° D) 82°

Үшбұрыштар теңдігінің белгілері және олардың салдары

1. Үшбұрыштар теңдігіне қатысты қай тұжырым тура?
 A) Тең үшбұрыштардың тек периметрлері тең.
 B) Тең үшбұрыштардың периметрлері мен тек бір бұрышы ғана тең.
 C) Тең үшбұрыштардың барлық сәйкес қабырғалары мен бұрыштары тең.
 D) Тең үшбұрыштардың бұрыштары ғана әртүрлі болады.
2. ABC ($AB = AC$) теңбүйірлі үшбұрышына AD биіктігі жүргізілген. Үшбұрыштар теңдігінің белгісі негізінде қандай салдар жиі айтылады?
 A) $BD = DC$ (Бұл биіктік медиана болып табылады).
 B) $\angle B = \angle C = 90^\circ$
 C) Мұндай үшбұрыш салуынуы мүмкін емес.
 D) AD мен BC қиылыспайды.
3. Қандай жағдайда «бір үшбұрышты екінші үшбұрышпен беттестіргенде, барлық төбелері сәйкес келсе, бұл үшбұрыштар тең болады» деп айтуға болады?
 A) Үнемі, әрбір беттестіру бойынша.
 B) Беттестіргенде төбелері ғана сәйкес келіп, қабырғалары сәйкес келмесе.
 C) Бұл – үшбұрыштар теңдігінің геометриялық түсіндірмелерінің бірі.
 D) Мұндай жағдай ешқашан болмайды.

- 109

- A) 2; 3 B) 1; 2; 3 C) 2; 4 D) 1; 3; 4

9. MPK үшбұрышында: $\angle M = \angle P$, PC биссектрисасы MK қабырғасын тең екі бөлікке бөледі. Егер $MC = 9,6$ см болса, MP -нің ұзындығы неге тең?

- A) 28,8 см B) 19,2 см C) 14,4 см D) 4,8 см

10. ABC теңбүйірлі үшбұрышының периметрі 28 см. AC – табаны, BD – осы үшбұрыштың биіктігі, $P_{\triangle DBC} = 18$ см. BD -нің ұзындығын табыңдар.

- A) 4 см B) 5 см C) 8 см D) 10 см.

Түзулердің параллельдік белгілері

1. Жазықтықта a және b түзулері 90° бұрыш жасап қиылысады. Мұндай түзулер қалай аталады?

- A) Параллель түзулер B) Сәйкес түзулер
C) Перпендикуляр түзулер D) Көлбеу

2. p және q түзулері параллель. Осы түзулердің бойында сәйкесінше A және B нүктелері белгіленген. p және q түзулерінің арақашықтығына қатысты A және B нүктелерінің арақашықтығы неге тең?

- A) Ол әрқашан түзулер арасындағы қашықтыққа тең.
B) Түзулер арасындағы қашықтықтан үлкен немесе тең болуы мүмкін.
C) Әрқашан үлкен болады.
D) Нөлге тең.

3. Егер параллель m және n түзулерін p қиюшысы қиса, онда сәйкес бұрыштар:

- A) тең болады. B) қосындысы 90° -қа тең.
C) қосындысы 180° -қа тең. D) анықталмаған.

4. l түзуі m және n параллель түзулерін қиғанда, α және β бұрыштарын жасайды. $\alpha + \beta = 180^\circ$ болса, онда бұлар m және n түзулеріндегі қандай бұрыштар?

- A) Сәйкес бұрыштар B) Айқыш бұрыштар
C) Ішкі тұстас бұрыштар D) Вертикаль бұрыштар

5. Параллель a және b түзулері мен c қиюшысы арасындағы екі тұстас бұрыштардың айырмасы 46° . Осы бұрыштардың үлкенін табыңдар.
 A) 113° B) 123° C) 126° D) 136°
6. Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының бірі осы үшбұрыштың басқа сыртқы бұрышынан 2 есе артық. Аталған сыртқы бұрыштарға іргелес емес ішкі бұрыш 60° -қа тең болса, осы сыртқы бұрыштардың айырмасын табыңдар.
 A) 100° B) 80° C) 60° D) 40°
7. Тік бұрышы A болатын ABC тікбұрышты үшбұрышының BK биссектрисасы жүргізілген, оның ұзындығы 12 см. Егер $BK = KC$ болса, үлкен катетін табыңдар.
 A) 6 см B) 12 см C) 16 см D) 18 см
8. Тік бұрышы B болатын ABC тікбұрышты үшбұрышының AK және CE биссектрисалары жүргізілген. Осы биссектрисалар арасындағы үлкен бұрыштың шамасын табыңдар.
 A) 130° B) 132° C) 134° D) 135°
9. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының айырмасы 2° . Үшбұрыштың ең кіші бұрышын табыңдар.
 A) 43° B) 44° C) 45° D) 46°
10. ABC теңбүйірлі үшбұрышында $\angle A = 15^\circ$, $AB = BC = 6$ см. C төбесінен түсірілген үшбұрыштың биіктігін табыңдар.
 A) 6 см B) 12 см C) 3 см D) 2 см

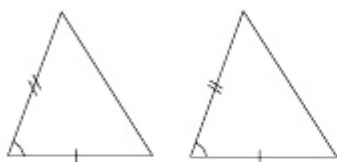
Шеңбер және салу есептері

1. Шеңбердің центрі арқылы өтіп, оның екі нүктесін қосатын кесінді қалай аталады?
 A) Хорда B) Радиус C) Диаметр D) Жанама
2. Центрі O нүктесі болатын шеңбер берілген. A нүктесі шеңбер бойында жатыр. $OA = 5$ см. Радиусты табыңдар.
 A) 5 см B) 10 см C) $\frac{5}{2}$ D) Белгісіз

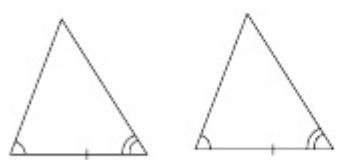
3. Шеңбердің хордасы туралы қай тұжырым тура?
 - A) Хорда әркез диаметрмен сәйкес келеді.
 - B) Хорда – шеңбердегі екі нүктені қосатын кесінді (центрі арқылы өтуі міндетті емес).
 - C) Хорданың ұзындығы радиустан кіші.
 - D) Хорда шеңбер центрі арқылы өте алмайды.
4. Шеңбермен бір ғана ортақ нүктесі бар түзу қалай аталады?
 - A) Қиюшы
 - B) Хорда
 - C) Жанама
 - D) Радиус
5. Центрі O болатын шеңберді AB жанамасы A нүктесінде жанайды. $OA = 6$ см. Шеңбердің центрінен AB -ға дейінгі қашықтық қандай?
 - A) 12 см
 - B) 6 см
 - C) 3 см
 - D) 2 см
6. Кез келген үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі ... болады.
 - A) биіктіктерінің қиылысу нүктесі
 - B) биссектрисаларының қиылысу нүктесі
 - C) үшбұрыш қабырғаларына жүргізілген орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі
 - D) медианалардың қиылысу нүктесі
7. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузаға жүргізілген медианасы 5 дм. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметрін табыңдар.
 - A) 5 дм
 - B) 6 дм
 - C) 10 дм
 - D) 8 дм
8. Центрі O болатын шеңберге C нүктесінен CE жанамасы жүргізілген. COE бұрышы 60° және O мен C нүктелерінің арақашықтығы 18 см болса, шеңбер радиусын табыңдар.
 - A) 4,5 см
 - B) 6 см
 - C) 9 см
 - D) 12 см
9. Шеңбердің AB және AC хордаларының ұзындықтары тең. Олардың арасындағы бұрыш 120° . Шеңбердің диаметрі 24 см. AB мен AC -нің қосындысы неге тең?
 - A) 12 см
 - B) 24 см
 - C) 48 см
 - D) 18 см
10. O центрінен AB хордасына дейінгі қашықтық 15 см және OAB бұрышы 45° -қа тең. C нүктесі AB хордасында жатыр, ал $AC = 4BC$. AC кесіндісінің ұзындығын табыңдар.
 - A) 12 см
 - B) 24 см
 - C) 40 см
 - D) 18 см

ҚОСЫМШАЛАР

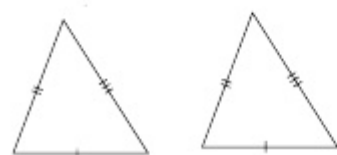
Үшбұрыштар теңдігінің белгілері



I. Екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша.



II. Бір қабырғасы мен оған іргелес бұрыштары бойынша.



III. Үш қабырғасы бойынша.

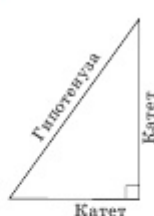
Үшбұрыштың түрлері



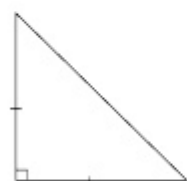
Теңбүйірлі



Тең қабырғалы



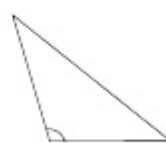
Тікбұрышты



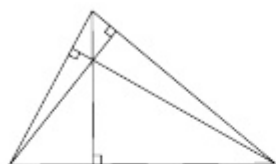
Теңбүйірлі
тікбұрышты



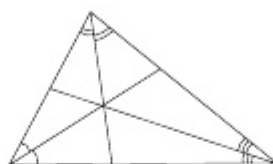
Сүйір бұрышты



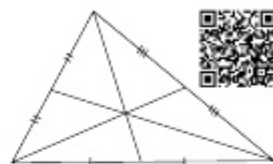
Доғал бұрышты



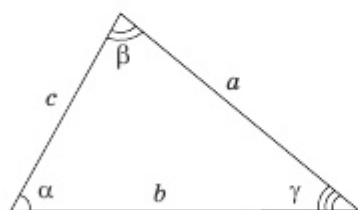
Үшбұрыштың
биіктіктері



Үшбұрыштың
биссектрисалары



Үшбұрыштың
медианалары

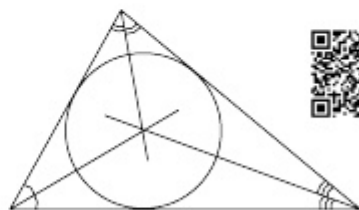


Үшбұрыштың ішкі бұрыш-
тарының қосындысы:

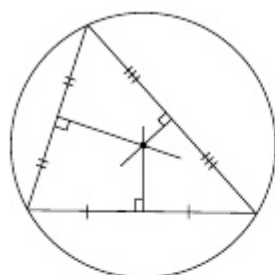
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Үшбұрыш теңсіздігі:

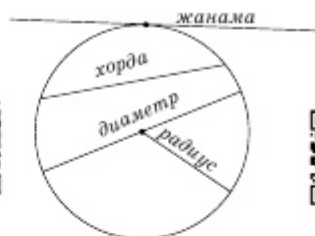
$$a + b > c, a + c > b, b + c > a.$$



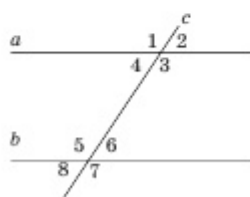
Үшбұрышқа іштей
сызылған
шеңбер



Үшбұрышқа сырттай
сызылған шеңбер



Шеңбер және оның
элементтері
 O – шеңбердің центрі



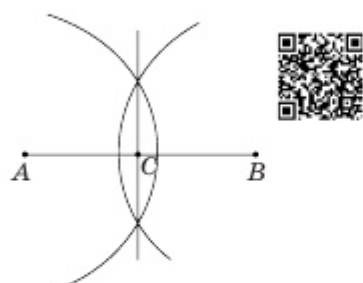
Түзулердің параллельдік белгілері:

I. $a \parallel b$, егер $\angle 4 = \angle 6$ ($\angle 3 = \angle 5$)

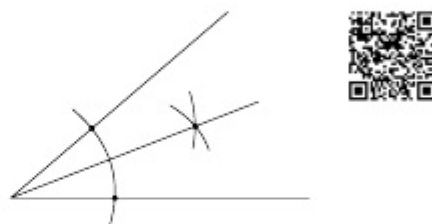
II. $a \parallel b$, егер $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ ($\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$)

III. $a \parallel b$, егер $\angle 1 = \angle 5$ ($\angle 2 = \angle 6$ немесе $\angle 4 = \angle 8$, немесе $\angle 3 = \angle 7$)

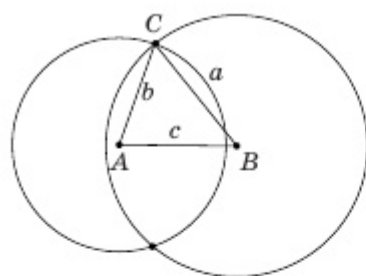
Қарапайым салу есептері



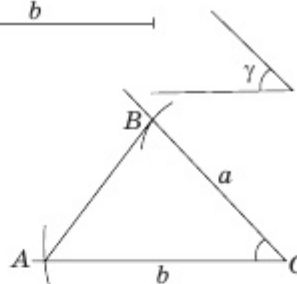
Кесіндіні
қақ (тең) бөлу



Бұрыштың
биссектрисасын салу



Үш қабырғасы бойынша
үшбұрыш салу



Екі қабырғасы және олардың
арасындағы бұрышы бойынша
үшбұрыш салу



Тең бұрыштар салу

ГЛОССАРИЙ

1-бөлім

Планиметрияның алғашқы түсініктері мен аксиомалары

Атауы	Мазмұны
Аксиома	Дәлелдеусіз алынатын ақиқат тұжырым
Планиметрия	Жазықтықта орналасқан фигуралардың қасиетін оқып үйренетін геометрияның саласы
Стереометрия	Кеңістікте орналасқан фигуралардың қасиетін оқып үйренетін геометрияның саласы
Теорема	Аксиомалар мен дәлелденген қасиеттерге сүйеніп дәлелденетін тұжырым
Кесінді	Түзудің екі нүктесі мен олардың арасында орналасқан нүктелер жиыны
Сәуле (жарты түзу)	Түзудің берілген нүктесінен оның бір жағында орналасқан нүктелер жиыны
Толықтауыш сәулелер	Түзудің бастапқы нүктесі ортақ болатын әртүрлі жарты түзулері
Бұрыш	Бастапқы нүктесі ортақ әртүрлі жарты түзулерден құралған фигура
Бұрыш қабырғалары	Бұрышты құрайтын жарты түзулер
Бұрыш төбесі	Бұрыш қабырғаларының ортақ нүктесі
Жазық (жазыңқы) бұрыш	Қабырғалары бір-біріне толықтауыш сәулелер болатын бұрыш
Тікбұрыш	Градустық өлшемі 90° болатын бұрыш
Сыбайлас бұрыштар	Бір қабырғасы ортақ, ал өзге қабырғалары бір-біріне толықтауыш сәулелер болатын бұрыштар
Вертикаль бұрыштар	Сәйкес қабырғалары бір-біріне толықтауыш сәулелер болатын бұрыштар
Сүйір бұрыш	Градустық өлшемі 90° -тан кіші бұрыш

Доғал бұрыш	Градустық өлшемі 90° -тан үлкен бұрыш
Перпендикуляр түзулер	Тік бұрыш жасап қиылысатын түзулер
Перпендикуляр сәулелер (кесінділер)	Перпендикуляр түзулер бойында орналасқан сәулелер (кесінділер)

2-бөлім

Үшбұрыштар теңдігінің белгілері және олардың салдары

Атауы	Мазмұны
Үшбұрыш	Бір түзу бойында орналаспайтын үш нүкте мен оларды қос-қостан қосатын үш кесіндіден құралған фигура
Үшбұрыш қабырғалары	Үшбұрышты құрайтын үш кесінді
Үшбұрыш төбелері	Үшбұрышты құрайтын үш нүкте
Үшбұрыш қабырғасына іргелес бұрыштар	Төбелері үшбұрыштың бір қабырғасының ұштарында орналасқан үшбұрыштың бұрыштары
Үшбұрыш қабырғасына қарама-қарсы бұрыш	Төбесі үшбұрыштың берілген қабырғасында орналаспайтын бұрыш
Үшбұрыштың биіктігі	Үшбұрыштың төбесінен оның қарама-қарсы қабырғасы арқылы өтетін түзуге түсірілген перпендикуляр
Үшбұрыштың биссектрисасы	Бұрышты тең екі бөлікке бөлетін оның ішкі сәулесі
Үшбұрыштың медианасы	Үшбұрыш төбесін қарама-қарсы қабырғасы ортасымен қосатын кесінді
Үшбұрыштың ортасызығы	Үшбұрыштың екі қабырғасының ортасын қосатын кесінді
Теңбүйірлі үшбұрыш	Екі қабырғасы тең үшбұрыш
Тең қабырғалы үшбұрыш	Барлық қабырғалары тең үшбұрыш

3-бөлім
Түзулердің параллельдік белгілері

Атауы	Мазмұны	
Параллель түзулер	Жазықтықтағы қиылыспайтын түзулер	
Қиюшы	Берілген екі түзуді қиып өтетін түзу	
Ішкі тұстас бұрыштар	Суреттегі 3 және 6-бұрыштар, 4 және 5-бұрыштар	
Ішкі айқыш бұрыштар	Суреттегі 3 және 5-бұрыштар, 4 және 6-бұрыштар	
Сәйкес бұрыштар	Суреттегі 1 және 5-бұрыштар, 2 және 6-бұрыштар, 4 және 8-бұрыштар, 3 және 7-бұрыштар	
Үшбұрыштың сыртқы бұрыштары	Үшбұрыш бұрыштарына сыбайлас бұрыштар	

4-бөлім
Шеңбер және салу есептері

Атауы	Мазмұны
Шеңбер	Жазықтықта центрі деп аталатын нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиыны
Радиус	Шеңбер нүктесін центрмен қосатын кесінді
Дөңгелек	Центрден қашықтығы радиустан аспайтын жазықтықтағы нүктелер жиыны
Хорда	Шеңбердің екі нүктесін қосатын кесінді

Диаметр	Центр арқылы өтетін хорда
Центрлік бұрыш	Төбесі шеңбер центрінде, ал қабырғалары шеңбер радиустары болатын бұрыш
Доға	Шеңбердің екі нүктесімен шектелетін бөлігі
Жанама	Шеңбермен жалғыз ортақ нүктесі бар түзу
Жанасу нүктесі	Жанама мен шеңбердің ортақ нүктесі
Сырттай сызылған шеңбер	Үшбұрыштың барлық төбелері арқылы өтетін шеңбер
Іштей сызылған шеңбер	Үшбұрыштың барлық қабырғаларын жанап өтетін шеңбер
Кесіндінің орта перпендикуляры	Кесіндінің ортасы арқылы өтетін, оған перпендикуляр түзу
Іштей жанасқан шеңберлер	Екі шеңбердің жалғыз ортақ нүктесі бар және олардың центрлері ортақ жанаманың бір жақ бөлігінде жатады
Сырттай жанасқан шеңберлер	Екі шеңбердің жалғыз ортақ нүктесі бар және олардың центрлері ортақ жанаманың екі жақ бөлігінде жатады

ЖАУАПТАРЫ

I. Планиметрияның алғашқы түсініктері мен аксиомалары

1.1. 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. 1.3. 1) Жоқ; 2) Жоқ; 3) *B* нүктесі. 1.4. Жатпайды. 1.5. 5,9 см. 1.6. 0,6 дм. 1.7. 1) Ия; 2) ия; 1.8. 6 түзу. 1.9. 6 нүкте. 1.10. Мүмкін емес. 1.11. Мүмкін емес. 1.12. 1) $AC=1$ см, $BC=1$ см, $AO=0,5$ см, $OB=1,5$ см; 2) $AB=6,4$ м, $AC=3,2$ м, $AO=1,6$ м, $OB=4,8$ м. 1.13. 1) 12 см немесе 2 см; 2) 37,9 дм. 1.14. 1) 20 см немесе 4 см; 2) 0,84 м. 1.15. 1) Болмайды; 2) 4,3 дм. 1.16. 1) Болмайды; 2) 5 дм. 2.19. 1) 10,5 см; 2) 1,5 см. 1.20. $\frac{a}{2}$. 1.21. 4 см. 1.22. 1) 1,5 см, 7,5 см; 2) AC және BD . 1.23. 29 см. 1.27. 4 бұрыш. 1.28. $2^{\circ}15'$; $8^{\circ}20'$. 1.29. $375'$; $120'$; $690'$. 1.30. 1) $13^{\circ}23'$; 2) $23^{\circ}32'$; 1.31. 1) 40° , 60° , 20° , 20° , 130° ; 2) $\angle AOB$ және $\angle COB$; 3) $\angle AOX=40^{\circ}$, $\angle AOB=20^{\circ}$, $\angle AOC=40^{\circ}$, $\angle AOD=90^{\circ}$, $\angle AOZ=140^{\circ}$. 1.32. 1) 110° ; 2) 119° . 1.33. Жоқ. 1.34. 120° ; 180° . 1.35. 15° ; $2,5^{\circ}$. 1.36. 20° . 1.37. 4 есе. 1.38. 1) Ия; 2) ия; 3) жоқ. 1.39. 1) 45° және 15° ; 2) 40° және 20° ; 1.40. 1) 45° және 45° ; 2) 36° және 54° ; 1.41. 1) 121° ; 2) $121^{\circ}2'$. 1.42. 48° . 1.43. 85° . 1.44. 81° . 1.45. 60° . 1.46. *A* нүктесі *B* және *C* нүктелері арасында жатады. 1.47. 150° , 135° , 120° , 90° . 1.48. 1) Жоқ; 2) жоқ; 3) иә. 1.49. 60° , 120° . 1.50. 1) 105° , 75° ; 2) 110° , 70° ; 3) 45° , 135° ; 4) 90° , 90° . 1.51. 1) 69° ; 2) 90° ; 3) 165° . 1.52. 180° . 1.53. $\angle AOC=120^{\circ}$, $\angle BOD=130^{\circ}$, $\angle COE=110^{\circ}$, $\angle COD=60^{\circ}$. 1.55. 160° . 1.56. Жоқ. 1.57. 90° -тан. 1.59. 1) 72° және 108° ; 2) 54° және 126° ; 3) 55° және 125° ; 4) 88° және 92° . 1.60. 25° және 155° . 1.61. 130° . 1.62. 144° және 36° . 1.63. 65° және 115° . 1.64. 90° . 1.66. 1) 155° ; 2) 135° ; 3) 105° . 1.67. 85° және 15° . 1.68. 150° немесе 90° . 1.71. 1) Өтпейді; 2) мүмкін емес. 1.72. 1) 55° және 12 см; 2) Мүмкін емес.

II. Үшбұрыштар теңдігінің белгілері және олардың салдары

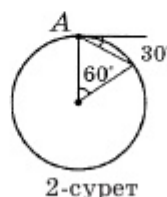
2.1. 11 см. 2.2. $PQ=5$ см, $QK=6$ см, $PK=7$ см. 2.3. $\angle A = 40^{\circ}$; $\angle B = 60^{\circ}$; $\angle C = 80^{\circ}$. 2.4. $PQ=XY=5$ см, $BC=YZ=6$ см, $AC=PR=7$ см. 2.5. 1) 12 см және $12^{\circ}1'$; 2) жоқ. 2.6. 1) Жоқ; 2) 23 см және $17^{\circ}35'$; 2.7. Иә. 2.8. Мүмкін емес. 2.9. 1) $70^{\circ}18'$, 17 дм; 2) жоқ. 2.10. 1) 16 дм; $121^{\circ}15'$; 2) жоқ. 2.12. 1) 5 м, 15° ; 2) жоқ. 2.13. 1) 8 м, 60° ; 2) жоқ. 2.14. 2) 42° , 47° . 2.15. 2) $BD = 5$ см, $AB = 15$ см. 2.16. 2) $AB = 14$ см, $BC = 17$ см. 2.19. 43° . 2.20. 59° . 2.21. 2) 110° . 2.25. 8 см. 2.33. 17 см. 2.34. 2 см. 2.35. 50° . 2.36. 120° . 2.37. 75° . 2.38. 3,5 м. 2.39. 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. 2.41. 140° . 2.42. 45° . 2.43. 2) 134° . 2.44. 2) 96° . 2.45. 10 см, 20 см және 20 см. 2.46. $AB=12,5$ см және $BC=15$ см. 2.53. 1) 50° ; 2) 14 см. 2.55. 8 см.

III. Түзулердің параллельдік белгілері

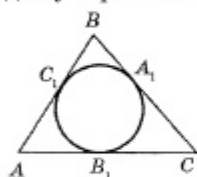
3.1. Тек біреу ғана. 3.2. 1) Жоқ; 2) иә. 3.3. 1) Жоқ; 2) иә. 3.4. 115° және 65° . 3.5. 105° және 75° . 3.6. 75° және 75° . 3.7. Үш бұрышы 72° -та, төрт бұрышы 108° -тан. 3.8. Жоқ. 3.9. 105° , 105° . 3.10. $a \parallel c$. 3.11. 2) Төрт бұрышы 55° -тан, төрт бұрышы 125° -тан. 3.15. 90° . 3.21*. Қарсы жору тәсілін қолданыңдар. 3.26. 45° , 45° , 90° . 3.27. 16 см. 3.28. 60° . 3.29. 10° , 140° . 3.30. 1) 100° ; 2) 65° . 3.31. 1) 90° ; 2) 120° ; 3) 100° ; 4) 153° . 3.32. 1) 40° , 40° , 100° немесе 40° , 70° , 70° ; 2) 60° , 60° , 60° ; 3) 100° , 40° , 40° . 3.33. 59° . 3.34. 33° , 75° , 56° , 75° және 90° . 3.36. 105° . 3.37. 103° . 3.38. 1) 9 см, 2) 9 см. 3.40. $57^\circ 30'$, $57^\circ 30'$, 65° немесе 65° , 65° , 50° . 3.41. 1) 9,5 см, 2) 9,5 см. 3.42. $73^\circ 20'$, $73^\circ 20'$ және $33^\circ 20'$. 3.43. 40° , 50° , 90° . 3.45. 40° , 50° , 90° . 3.46. *Нұсқау*. AD медианасы ABC үшбұрышын екі теңбүйірлі үшбұрыштарға бөлетінін қолданыңдар. 3.47. Алдымен үшбұрыштың екі қабырғасының ортасы арқылы өтетін түзудің үшінші қабырғасына параллель екенін көрсетіңдер. 3.49. Мүмкін емес. 3.51. 1) $\angle A > \angle B$. 3.52. 1) Табылмайды; 2) табылады; 3) табылады. 3.53. 1) $BC > AC > AB$; 2) $AB > AC = BC$. 3.54. $\angle B > \angle A > \angle C$. 3.55. 1) Теңбүйірлі. 3.56. Мүмкін емес. 3.57. 1) Мүмкін; 2) мүмкін емес. 3.58. Сүйір бұрышты. 3.59. 1) 5 см; 2) 21 см; 3) 6 дм. 3.60. 10 см. 3.63. $AB = 5$ см. 3.65. $\triangle ACE = \triangle CAD$ теңдігін қолданыңдар. 3.67. 20 см, 20 см. 3.69. 10 см, 10 см, 16 см. 3.71. 29 см, 29 см.

IV. Шеңбер және салу есептері

4.1. 5 см; жоқ. 4.4. 1) екі нүктеде; бір нүктеде; қиып өтпейді; 4.5. 70 см, 10 см. 4.6. Мүмкін емес. 4.7. 1) Екі; 2) бір; 3) жүргізуге болмайды. 4.8. Мүмкін емес. 4.9. 1) Сыртқы жанасады; 2) екі нүктеде қиылысады; 3) ортақ нүктелері жоқ. 4.10. 1) Түзу шеңберді екі нүктеде қиып өтеді; 2) түзу шеңбермен жанасады; 3) түзу мен шеңбердің ортақ нүктелері болмайды. 4.11. 120° . 4.13. 60° . 4.14. 120° . 4.15. Бар. 4.17. 120, 60. 4.19. 140 см, 20 см. 4.23. 1) Шеңбер центрінен берілген түзуге перпендикуляр жүргізу қажет. 2) Шеңбер центрінен өзара перпендикуляр екі диаметр жүргізу қажет, олардың бірі берілген түзуге перпендикуляр (1-сурет). 4.24. (2-сурет). 4.25. $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. 4.26. 10 см. 4.27. 60° . 4.28. 6° .



4.29. Хорда салып, оның орта перпендикулярын жүргізіндер, ол хорданы және осы хордамен шектелген доғаны екіге бөледі.
4.30. 1) Қарсы жорып дәлелдеу қажет; 2) мүмкін емес (шеңбердің үш нүктесі бір түзу бойында жатпайды). **4.31*.** 1) Тікбұрышты үшбұрыштар теңдігін қолдану керек. 2) Радиус жанамаға перпендикуляр болатынын ескеру керек.



3-сурет

$$\begin{aligned} 4.32*. AB+AC-BC &= (AC_1+BC_1)+(AB_1+CB_1)- \\ &-(BA_1+CA_1)=AC_1+BC_1+AC_1-BC_1-CA_1= \\ &=2AC_1AC_1=(AB+AC-BC) \text{ (3-сурет).} \end{aligned}$$

4.33. AB кесіндісінің орта перпендикулярлары.

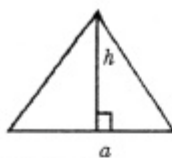
4.34. Шеңбер. **4.35.** Шеңбер. **4.38.** Оларға параллель

түзу. **4.42.** 1) a қабырғасы мен оған іргелес α және

$90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ бұрыштары бойынша үшбұрыш салу керек;

3) $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ a , α бойынша; 4) Үш қабырғасы бойынша; 5) a , h берілген, катеттері: $\frac{a}{2}$, h болатын үшбұрыш салу. **4.43.** Мұндай

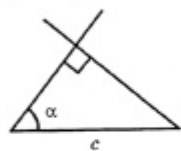
үшбұрыш салу үшін $2a+b>c$, $2a+c>b$, немесе $b+c>2a$ теңсіздігін қанағаттандыру қажет. Үшбұрыштың кез келген қабырғасының ұзындығы оның қалған екі қабырғасының ұзындықтарының қосындысынан үлкен болуы керек. **4.44.** Мұндай үшбұрыш салу үшін $2a+b>c$, $2a+c>b$, немесе $b+c>2a$ теңсіздігін қанағаттандыру қажет. Үшбұрыштың кез келген қабырғасының ұзындығы оның қалған екі қабырғасының ұзындықтарының қосындысынан үлкен болуы керек.



4-сурет

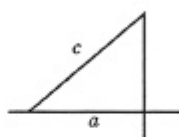
4.45. 4-сурет.

4.46. 1) 5-сурет;



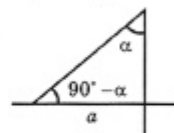
5-сурет

2) 6-сурет;



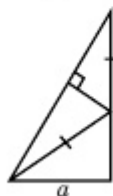
6-сурет

3) 7-сурет.



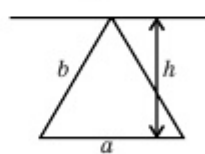
7-сурет

4.48. 8-сурет



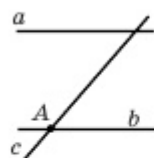
8-сурет

4.49. 9-сурет



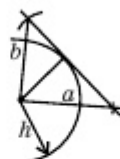
9-сурет

4.50. 10-сурет



10-сурет

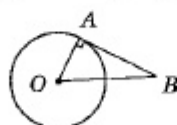
4.51. 11-сурет



11-сурет

4.52. Екі нүктені қосатын кесіндінің орта перпендикуляры мен берілген түзудің қиылысу нүктесі. 4.53. Биссектриса мен берілген нүктеде қабырғаға перпендикуляр түзудің қиылысу нүктесі центр болады.

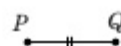
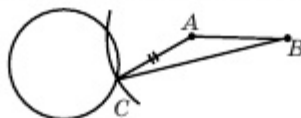
4.54. OAB тікбұрышты үшбұрышын салу керек (12-сурет).



12-сурет

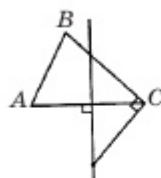
4.55. Берілген нүктені центр етіп, берілген радиуспен шеңбер салса, жеткілікті.

4.58. Жауабы: 13-суретте көрсетілген.



13-сурет

4.59. 14-сурет.



14-сурет

4.61. 15-сурет.



15-сурет

4.62. Екі орта перпендикулярдың қиылысу нүктесі. 4.63. ABC бізге қажет үшбұрыш: $B=\beta$, $BC=a$. Егер $AB > AC$ болса, онда AB қабырғасынан $AD=AC$ болатындай D нүктесін аламыз: $BD=AB-AC$. Онда $\triangle ACD$ теңбүйірлі болатынын қолданыңдар. 4.70. Нұсқау. Алдымен бұрыш биссектрисасын жүргізіңдер. 4.71. Нұсқау. BC және AB қабырғаларынан $BA_1=AC_1=CB_1$ болатындай A_1 және C_1 нүктелерін алыңдар. 4.72*. Нұсқау. Алдымен гипотенузасы берілген медианаға тең, ал катеті берілген биіктікке тең тікбұрышты үшбұрыш салыңдар. 4.73. Нұсқау. Алдымен гипотенузасы берілген биссектрисаға тең және катеті берілген биіктікке тең тікбұрышты

үшбұрыш салыңдар. **4.74***. Нұсқау. Алдымен C бұрышының биссектрисасын салыңдар.

V. 7-сынып материалын қайталауға арналған жаттығулар

5.1. X нүктесі AB кесіндісінен тысқары жата алмайды. X нүктесі K және B нүктелерінің арасында жатсын, $AX = y$ деп алайық. Онда есеп шарты бойынша $y + 8 - y + y - 4 = 9$, яғни $y = 5$. Онда $XK = 1$ см және XK -ның сол жағында жатыр. Осы сияқты X -ті A мен K -ның арасында жатыр деп есептеп, екінші нүктені табамыз. **5.2.** AB түзуінде және AB кесіндісінен тысқары оның ұштарынан 1 см қашықтықта орналасады. **5.3.** $H = BE \cap CF$. Онда AH түзуінде үшінші биіктігі жатады. Сондықтан $X = AH \cap BC$. $\triangle AXC = \triangle BEC$. Осыдан $BC = 17$ дм. **5.4.** $\angle PKM = \angle XLM = 27^\circ$. **5.6.** $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (III белгі) $\Rightarrow BK = B_1K_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1 \Rightarrow$ I белгі бойынша $\triangle ABK = \triangle A_1B_1K_1$. **5.7.** Есеп шарты бойынша $AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ теңбүйірлі және $\angle A = \angle C = 80^\circ$. Онда $\angle EAD = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$. $AE = ED \Rightarrow \triangle AED$ – теңбүйірлі және $\angle EAD = \angle EDA = 40^\circ$. $ED \parallel AC$, себебі $\angle EDA = \angle DAC$ – айқыш бұрыштар, $\angle BED = \angle BAC = 80^\circ$ – сәйкес бұрыштар. **5.8.** 5.7-есеп сияқты. **5.9***. a түзуі – жол болса, онда $A_1 \perp a$ болсын. $AA_1 \cap a = K$, $AK = A_1K$ деп алсақ, онда C аялдамасын $A_1B \cap a$ нүктесінде салу керек. **5.10***. Нұсқау. Егер $N = BX \cap AC$ болса, онда ABN және XNC үшбұрыштарына үшбұрыштар теңсіздігін қолдану қажет. **5.11.** 5 см. **5.12.** 34 см. **5.13.** Нұсқау. Үшбұрыш бұрыштары мен қабырғаларының арасындағы қатынаспен үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын қолданыңдар. **5.14.** 70° . Нұсқау. O – A төбесінен жүргізілген биссектриса мен BN түзуінің қиылысу нүктесі. Алдымен $\triangle AOC = \triangle NOC$ теңдігін дәлелдеңдер. **5.15.** Нұсқау. Кесіндінің бір ұшын үшбұрыш төбесімен қосыңдар. **5.16.** Нұсқау. Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарының арасындағы қатынасты қолданыңдар. **5.17.** $\angle AKP = \angle BKN$, $\triangle APK$ және $\triangle BNK$ – тікбұрышты үшбұрыштар және $\angle AKP = \angle BKN \Rightarrow \angle PAK = \angle NBK \Rightarrow \triangle APK = \triangle BNK \Rightarrow PK = NK$ және $AK = KB$. **5.18** $\triangle ANK = \triangle BKN$ (екі катеті бойынша) $\Rightarrow \angle BKN = \angle AKN$ және $\angle NAK = \angle KBN$. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90° болғандықтан және $\angle BNK + \angle ANB = 90^\circ \Rightarrow \angle BNA = \angle AKB$. Осы сияқты $\angle BNA = \angle NAK = \angle KBN = \angle AKB \Rightarrow \triangle NOK$, $\triangle AON$, $\triangle BOK$ – теңбүйірлі үшбұрыштар және $ON = OK = OA = OB$. **5.21.** Нұсқау. ABC үшбұрышының AN медианасы мен

$АН$ биіктігі A бұрышын тең $ВАН$, $НАН$, $НАС$ бұрыштарына бөлсін. $АС$ қабырғасына ND перпендикулярын жүргізіп, $ND = NH$ теңдігін дәлелдеу керек. **5.22.** Нұсқау. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы катеттен үлкен екенін ескеріңдер. **5.27.** Нұсқау. $\triangle ABC$ – бізге қажет үшбұрыш, ал BN – оның берілген медианасы болсын. BN -ді созып (N нүктесінен ары қарай), $ND = BN$ болатындай D нүктесін аламыз. Онда $\triangle CNB = \triangle DNA \Rightarrow AD = BC$. Осыдан салу жоспары шығады. **5.29.** 4, 3, 2, 1 немесе біреуі де жоқ. **5.30.** 4. **5.31.** Нұсқау. $AD = R$, $OD = 2R$ болатындай OAD үшбұрышын салу керек. Мұнда R – берілген шеңбердің радиусы. **5.32.** Нұсқау. Бізге қажет ABC үшбұрышының A бұрышы мен BH биіктігі және оның периметріне тең PQ кесіндісі берілсін. Алдымен ABH үшбұрышын салып, содан соң $AD + AB = PQ$ болатындай $D \in AN$ нүктесін аламыз. **5.33.** Нұсқау. Алдымен қабырғасы берілген периметрге тең, ал іргелес бұрыштары берілген бұрыштардың жартысына тең үшбұрыш салыңдар. **5.34*.** Нұсқау. BC , $AC + AB$, $\angle B - \angle C$ бізге қажет $\triangle ABC$ -нің берілген элементтері болсын. CA қабырғасының A -дан тысқары созындысынан $AA_1 = AB$ болатындай A_1 нүктесін алып, $\triangle CBA_1$ -ді салыңдар. **5.35*.** Нұсқау. Берілген шеңберлердің бірімен концентрлі, радиусы берілген шеңберлер радиустарының қосындысына не айырмасына тең көмекші шеңбер салыңдар.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз	3
Кіріспе	5
1. ПЛАНИМЕТРИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ТҮСІНІКТЕРІ МЕН АКСИОМАЛАРЫ	8
1.1. Нүкте, түзу және кесінді	8
1.1.1. Нүкте және түзу	8
1.1.2. Кесінді	9
1.2. Жарты жазықтық, сәуле және бұрыш	15
1.2.1. Жарты жазықтық	15
1.2.2. Сәуле	16
1.2.3. Бұрыш	17
1.2.4. Кесінділер мен бұрыштарды өлшеп салу	19
1.2.5. Аксиомалар және теоремалар	20
1.3. Сыбайлас және вертикаль бұрыштар	25
1.3.1. Сыбайлас және вертикаль бұрыштар	25
1.3.2. Перпендикуляр түзулер	26
1.3.3. Бұрыш биссектрисасы	28
1.3.4. Теоремаларды қарсы жорып дәлелдеу тәсілі	28
«Планиметрияның алғашқы түсініктері мен аксиомалары» бөлімі бойынша қосымша есептер	33
Терминдер сөздігі	35
2. ҮШБҰРЫШТАР	36
2.1. Үшбұрыш және берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың табылуы	36
2.1.1. Үшбұрыш	36
2.1.2. Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың табылуы	37
2.2. Үшбұрыштар теңдігінің белгілері	40
2.2.1. Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі	40
2.2.2. Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі	40
2.2.3. Үшбұрыштың биіктігі, биссектрисасы, медианасы және орта сызығы	45
2.2.4. Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеттері. <i>Кері теорема</i> ұғымы	45
2.2.5. Үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі	48
«Үшбұрыштар» бөлімі бойынша қосымша есептер	55
Терминдер сөздігі	57

3. ТҮЗУЛЕРДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІК БЕЛГІЛЕРІ.....	58
3.1. Түзулердің параллельдік белгілері.....	58
3.1.1. Параллель түзулер.....	58
3.1.2. Екі түзудің қиюшымен жасайтын бұрыштары.....	59
3.2. Үшбұрыш қабырғалары мен бұрыштары	
арасындағы қатынастар	66
3.2.1. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы.....	66
3.2.2. Тікбұрышты үшбұрыш.....	67
3.2.3. Үшбұрыш қабырғалары мен бұрыштары	
арасындағы қатынастар	72
3.2.4. Үшбұрыш теңсіздігі.....	73
«Түзулердің параллельдік белгілері» бөлімі бойынша	
қосымша есептер	77
Терминдер сөздігі	79
4. ШЕҢБЕР ЖӘНЕ САЛУ ЕСЕПТЕРІ	80
4.1. Шеңбер, дөңгелек, олардың элементтері	
мен бөліктері. Центрлік бұрыш.....	80
4.1.1. Шеңбер және дөңгелек	80
4.1.2. Шеңберге жүргізілген жанаманың қасиеті	81
4.1.3. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер	82
4.1.4. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер.....	84
4.2. Геометрияның салу есептері.....	89
4.2.1. Қарапайым салу есептері.....	89
4.2.2. Үш элементі бойынша үшбұрыш салу.....	91
4.2.3. Салу есептері	92
«Шеңбер және салу есептері» бөлімі бойынша	
қосымша есептер	99
Терминдер сөздігі	101
5. 7-СЫНЫП МАТЕРИАЛЫН ҚАЙТАЛАУҒА	
АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР	102
БӨЛІМДЕР БОЙЫНША ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫ	107
ҚОСЫМШАЛАР.....	113
ГЛОССАРИЙ	116
ЖАУАПТАРЫ.....	120

Оқу басылымы
Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Бектасова Алмагүл Ибраимқызы

ГЕОМЕТРИЯ
Жалпы білім беретін мектептің
7-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Л. Бултекова*
Көркемдеуші редакторы *А. Имантай*
Техникалық редакторлары *Ұ. Рысалиева, М. Жансұлтанова*
Корректорлары *А. Іздік, А. Сейткен*
Компьютерде беттеген *А. Чазимкулова*

ИБ № 081

Теруге 18.11.2024 жіберілді. Басуға 28.05.2025 қол қойылды. Пішімі 60х90^{1/16}. Офсеттік қағаз. Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 8,0. Есептік баспа табағы 6,99. Таралымы 40000 дана. Тапсырыс № 8989.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы, Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі, 41.

