

Ә.Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д.Ә. ШЫНЫБЕКОВ, А.И. БЕКТАСОВА

АЛГЕБРА

Жалпы білім беретін мектептің
7-сыныбына арналған оқулық



Қазақстан Республикасының Оқу-ағарту министрлігі ұсынған



Алматы «Атамұра» 2025

1-8988

ӨОЖ 373.167.1

КБЖ 22.1 я 72

III 97

Жалпы редакциясын басқарған физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі **М. Өтелбаев**

Пайдаланылған шартты белгілер:



– Жаңа материалды бекіту сұрақтары



– тарихқа шолу



– практикалық және шығармашылық тапсырмалар

A

– бастапқы деңгейлі есептер

B

– орта деңгейлі есептер

C

– жоғары деңгейлі есептер

– күрделілігі жоғары есептер

Шыныбеков Ө.Н. және т.б.

III 97 Алгебра. Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық/Ө.Н. Шыныбеков, Д.Ө. Шыныбеков, А.И. Бектасова. – Алматы: Атамұра, 2025. – 224 бет.

ISBN 978-601-10-0651-4

ISBN 978-601-10-0651-4

© Шыныбеков Ө.Н.,
Шыныбеков Д.Ө.,
Бектасова А.И., 2025
© «Атамұра», 2025

АЛҒЫ СӨЗ

Жалпы білім беретін мектептердің 7-сыныбына арналған «Алгебра-7» оқулығының өзге оқулықтармен салыстырғанда бірқатар өзіндік ерекшеліктері бар. Әрбір тақырыпқа берілген есептер арнайы үш топқа бөлінген: **A**, **B** және **C**. **A** және **B** тобындағы есептер жеңіл және орташа қиындықтағы деңгейде, ал **C** тобына қиындық деңгейі жоғары есептер жинақталған. Бұл оқулықтың әрі жалпы білім беретін мектептерде, әрі математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарда қолданылуына жол ашады. Мұнда **C** тобы есептері негізінен математиканы тереңдетіп оқытатын сынып оқушылары мен математикаға қабілеті жоғары оқушыларға арналған. Сонымен бірге оқушыларға ыңғайлы болуы үшін әрбір бөлім есептері мен қажетті сызбалары қос сандармен нөмірленген. Оның біріншісі тарау (бөлім) нөмірін, ал екіншісі осы тараудағы есептің (сызбаның) реттік нөмірін көрсетеді.

Оқулықтың соңында функционалдық сауаттылықты арттыруға арналған тапсырмалар, олардың жауаптары мен оқулықтағы кейбір есептердің шығарылу жолдары, сондай-ақ қорытынды тест тапсырмалары QR-код түрінде берілді.

Жалпы оқулықпен дәріс алу барысында оқу бағдарламасы ерекшеліктеріне тәуелсіз мынадай қағиданы ұстанған дұрыс: жаңа өтілген тақырыпты пысықтау барысында, ең алдымен **A** тобы материалдарын толық меңгеріп алу қажет. Онсыз келесі **B**, **C** топтары есептерін шығару және келесі тақырыпты меңгеру мүмкін емес.

V-VI СЫНЫП МАТЕРИАЛЫН ҚАЙТАЛАУ

Балалар, қайталауға берілген есептер мен жаттығуларды орындау алдында төмендегі сұрақтардың жауабын естеріңе түсіріп алғандарың абзал.

- 1) Бүтін сандарды қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдары қалай орындалады?
- 2) Жай бөлшек деген не?
- 3) Жай бөлшектерді қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдары қалай орындалады?
- 4) Дұрыс және бұрыс бөлшек деп қандай бөлшекі айтады? «Аралас сан» ұғымын қалай түсінесіңдер?
- 5) Аралас сандарды қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдары қалай орындалады?
- 6) Ондық бөлшек деп қандай бөлшекті айтады? Шексіз периодты ондық бөлшек деген не?
- 7) Жай бөлшекті ондық бөлшекке және керісінше, ондық бөлшекті жай бөлшекке қалай айналдырады?
- 8) Ондық бөлшектерді қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдары қалай орындалады?
- 9) Жай бөлшекке ондық бөлшекті қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдары қалай орындалады?
- 10) Рационал сан деген не?
- 11) Санның процентін қалай табады?
- 12) Санның модулі деген не? Оны қалай анықтайды?
- 13) Таңбалары әртүрлі сандарды қалай қосады?
- 14) Пропорция деген не? Оның негізгі қасиеттерін атаңдар.
- 15) Координаталық түзу (өс) деген не? Рационал санды координаталық түзуде қалай кескіндейді?
- 16) Қандай сандарды қарама-қарсы сандар деп атайды?
- 17) Алгебралық өрнектер деген не?
- 18) Алгебралық өрнектерді ықшамдау: жақшаны ашу, жақша сыртына шығару, ұқсас қосылғыштарды біріктіру тәсілдері.
- 19) Сызықтық теңдеу деген не? Оны қалай шешеді?
- 20) Сан аралықтарының қандай түрлерін білесіңдер?
- 21) Бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктерді қалай шешеді?
- 22) «Жазықтықтағы координаталық жүйе» ұғымын қалай түсінесіңдер? Нүктенің координаталары қалай анықталады?
- 23) Шамалар арасындағы тәуелділікті қалай түсінесіңдер?
- 24) Шамалар арасындағы тәуелділіктің берілу тәсілдерін атаңдар.

A

1. Амалдарды орындаңдар.

1) $2,8 \cdot (-3,9) - 76,15 : 15,23$

3) $(0,62+0,56-2,29) \cdot (8,44-5,34)$

2) $34,68:(7,11+1,56)+46:(2,45-1,65)$ 4) $62,93+(12,5-7,6+3,21):0,1$

4) $62,93 + (12,5 - 7,6 + 3,21) : 0,1$

2. Амалдарды орындаңдар.

$$1) \quad 2\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{15} - 3\frac{5}{6} \right) + \frac{1}{4}$$

$$3) \left(6\frac{3}{8} - 2\frac{3}{4} \right) \cdot (-4) + \frac{7}{18} \cdot 9$$

$$2) -1\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{19}{20}\right) \cdot \left(6\frac{5}{6} + 4\frac{2}{3}\right)$$

$$4) \quad 9\frac{1}{6} : \left(4\frac{1}{3} - 8\right) + 24 \cdot \frac{3}{8}$$

3. Теңдеулерді шешіндер.

$$1) 4x + 5(3 - 2x) = 5 - 11x$$

$$3) \quad 14(2y-3)-5(y+4)=2(3y+5)+5y$$

$$2) \frac{2-7x}{6} + \frac{4x+7}{3} = -\frac{x}{2}$$

$$4) \ 5 + \frac{7y - 12}{3} = y + 13$$

4. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) \frac{3y+9}{5} + \frac{5y-5}{4} = 6 + \frac{3y+1}{2}$$

$$3) \frac{7(y-6)}{4} = \frac{5(y+1)}{3} - 3(y+2)$$

$$2) \frac{3}{4}x + 2x + 5 = 2\frac{3}{4}x + 4,1 + 0,9;$$

4) $4 \cdot |x| - 7 = -2|x| + 5$

5. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{5}{8}x - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{12}y \right) + \frac{1}{3}y$$

$$3) \quad 2\frac{1}{6}y - \left(7x - 1\frac{3}{4}y\right) + 2\frac{1}{5}x;$$

$$2) \quad 9,4y + \left(2x - 11\frac{1}{4}y\right) - 3\frac{5}{9}x;$$

$$4) \quad 3,5x + \left(6\frac{1}{4}y - 7x\right) - 7y.$$

5-6-СЫНЫП МАТЕРИАЛЫН ҚАЙТАЛАУ

6. Теңсіздіктерді шешіңдер.

1) $11x - 8,8 > 4x + 5,2$

4) $4,6 \cdot (x - 3) \geq 4,2 + x$

2) $2\frac{5}{9}x - 15 > x - 1$

5) $x + 3 < 5,7(x + 10) + 2\frac{2}{5}$

3) $18,9x - 13,4 \leq 10,1x + 13$

6) $4\frac{1}{6}y + (2 - y) \leq 4y - 3$

7. Сызықтық функцияның графигін салыңдар.

1) $y = 2x + 1$

3) $y = -\frac{3}{2}x + 3$

5) $y = -0,6x - 1,2$

7) $y = 2x$

2) $y = 3 - x$

4) $y = 0,5x - 2$

6) $y = \frac{2}{7}x - 2$

8) $y = -3$

8. Көрсетілген теңдеулермен берілген түзулердің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

1) $y = 5x - 3$ және $y = 3x + 1$

3) $y = -4x + 3$ және $y = \frac{1}{2}x + 3$

2) $y = 4x - 5$ және $y = x + 4$

4) $y = -2x - 10$ және $y = -x - 7$

9. Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

1) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8x - 3y = 7 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 5y = -2 \\ 0,5x - y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x = -6y \\ 7y - 2x = 20 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + y) - x = -6 \\ 3x - (x - y) = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 3(x + y) = 11 \\ 7(x + 3y) - 4y = -23 \end{cases}$

10. Екі санның қосындысы 58-ге, ал айырмасы 8-ге тең. Осы сандарды табыңдар.

В

11. Есептеңдер.

1) $\frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \frac{1}{6}}{\frac{3}{8} + \frac{7}{12} - \frac{1}{2}}$

2) $5 + \frac{4}{2 - \frac{1}{3}}$

3) $\frac{3 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{3}}{7 - \frac{4}{5}}$

4) $2 + \frac{3}{2 - 1\frac{1}{2}}$

12. Теңдеулерді шешіңдер.

1) $\frac{x+9}{7} = 1 + \frac{x+1}{3}$

3) $\frac{3x+4}{5} + \frac{x-7}{2} = \frac{2(2x+3)}{5}$

2) $1 - \frac{5x-2}{6} = \frac{x-5}{9}$

4) $\frac{7x-3}{2} - \frac{9-4x}{3} = \frac{7-x}{2}$

13. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) \frac{3x-11}{4} - \frac{3-5x}{8} = \frac{x+6}{2}$$

$$3) \frac{3}{4}x - \frac{25}{4} + \frac{4}{3}x = 0$$

$$2) 6 - \frac{3-y}{2} = \frac{y-1}{2} + \frac{y-2}{3}$$

$$4) \frac{y-3}{6} + y = \frac{2y-1}{3} - \frac{4-y}{2}$$

14. Теңсіздіктің ең үлкен бүтін шешімін табыңдар.

$$1) x+2 \geq 2,5x-1$$

$$3) \frac{x-2}{5} - \frac{2x+3}{3} > 1$$

$$2) \frac{3x+2}{4} - \frac{x-3}{2} < 3$$

$$4) \frac{2x-8}{3} - \frac{3x-5}{2} \geq 4$$

15. Теңсіздіктердің ең кіші бүтін шешімін табыңдар.

$$1) \frac{2x+2}{5} - \frac{x-1}{2} < 2$$

$$3) \frac{5x}{11} - \frac{x+2}{4} \geq 3$$

$$2) \frac{x}{6} - \frac{x}{7} \geq 1$$

$$4) \frac{2x-5}{3} - 1 > 3-x$$

16. Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

$$1) \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ 3x - 5y = -3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1}{4}x - y = -5 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}y = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - 2y = \frac{1}{2} \\ 4y - x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ \frac{y}{x} = 0,75 \end{cases}$$

17. Есептеңдер.

$$1) \left(\frac{1}{2} + 0,125 - \frac{1}{6} \right) \cdot \left(6,4 : \frac{80}{3} \right) + \frac{1}{8}$$

$$2) \left(\frac{3\frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 1\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6 - 2\frac{1}{3}}{4,6 + 2\frac{1}{3}} \right) \cdot 5,2 : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 5,7 \right)$$

$$3) \frac{\left(13\frac{1}{4} - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6} \right) \cdot 230,04 + 46,75}{0,01}$$

18. Екі санның қосындысы 45-ке тең, ал олардың қатынасы 7:8 қатынасындай. Осы сандарды табыңдар.

19. Үш кесіндінің ұзындығы 35 см. Оның біреуі екіншісінен 4 есе қысқа, ал үшіншісінен 1 см ұзын. Кесінділердің әрқайсысының ұзындығын табыңдар.

20. Құны 525 теңгелік затты сатып алу үшін 5 және 10 теңгелік монеталар төленді. Төленген 5 және 10 теңгелік монеталар саны өзара тең екені белгілі болса, онда барлығы неше монета берілді?

С

21. Координаталық жазықтықта теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын нүктелер жиынын бейнелеңдер.

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 5x - y \leq 4 \\ 0,5x + y \leq 0 \end{cases} & 3) \begin{cases} 3x - 5y \leq -10 \\ x + y \geq 9 \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 6 \end{cases} & 4) \begin{cases} 4x + 3y + 12 \geq 0 \\ 3y - x - 6 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

22. Теңдеуді x айнымалысына қатысты шешіңдер.

$$\begin{array}{l} 1) (5x - 3a) - (2x + 5a) = 4a \\ 2) (x + a) + (x + 2a) - (x - 3a) = 8a \\ 3) \left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}x + 0,6\right) - \left(\frac{7}{12}x - 0,3\right) = 5,8 \\ 4) (x - a - b) + (2x + 3a + b) = (2a - b) - (2a - 5b) \end{array}$$

23. Теңдеулер жүйесін x және y айнымалыларына қатысты шешіңдер.

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} px - qy = a \\ lx + my = b \end{cases} & 3) \begin{cases} \frac{2x+3}{3y-2} = 1 \\ x(2y-5) - 2y(x+3) = 2x+1 \end{cases} \\ 2) \begin{cases} bx + ay = ab \\ bx + 1 = a + y \end{cases} & 4) \begin{cases} \frac{x+1}{y+2} = 5 \\ 3(2x-5) - 4(3y+4) = 5 \end{cases} \end{array}$$

24. Шешімі болмайтын екі айнымалысы бар бірнеше теңдеулер жүйесін құрыңдар.

25.
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ ax + 2y = c \end{cases}$$

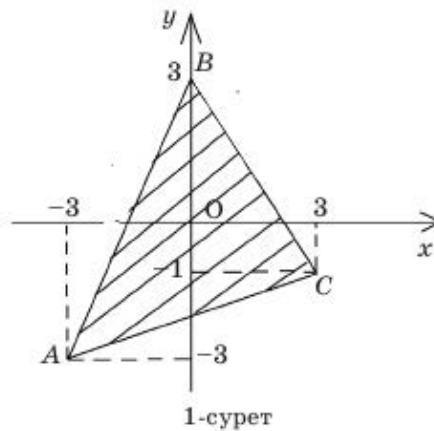
теңдеулер жүйесінің: 1) бір шешімі; 2) шексіз көп шешімі болатындай; 3) шешімі болмайтындай етіп, a мен c -нің мәндерін табыңдар.

26. Үйді жөндеуден өткізу үшін бірнеше жұмысшы жалданды және олар бұл жұмысты белгіленген уақытта орындай алады. Егер жұмысшы саны 3 адамға қысқарса, онда жұмыстың аяқталу мерзімі 6 күнге ұзарады. Егер жұмысшы саны 2 адамға көбейсе, онда жұмыс мерзімі 2 күнге қысқарады. Неше жұмысшы жалданды және олар жұмысты неше күнде аяқтайды?

27. Әкесі мен қызының жасын бірге алғанда 62 жас болды. 4 жыл бұрын әкесінің жасы қызының жасынан 8 есе үлкен еді. Олардың әрқайсысы қазір неше жаста?

28. x -тің қандай мәндерінде $\frac{3x-4}{2}$ бөлшегі: 1) 1-ден үлкен; 2) 1-ден кіші; 3) 1-ге тең болады?

29. Шешімдерінің жиыны координаталары ABC үшбұрышының қабырғаларында және ішінде жататын нүктелерден тұратындай етіп, теңсіздіктер жүйесін құрыңдар (1-сурет). Мұнда $A(-3; -3)$, $B(0; 3)$ және $C(3; -1)$.



Алгебра ұғымының пайда болуы және қалыптасуы



Алгебра – түрлі өрнектерге амалдар қолданудың ортақ қасиеттерін және осы амалдарға байланысты теңдеулерді шешу жолдарын оқытатын математиканың саласы.

Алгебраның алғашқы элементтерін ежелгі Грекия, Египет, Вавилон, Үнді және Қытай елдері ғалымдары қолдана білген. Біздің заманымыздан бұрынғы VI ғасырдан бастап грек ғалымдарының қолжазбаларында теңбе-тең түрлендірулер жөніндегі алғашқы жалпы тұжырымдар (ережелер) кездеседі. Бұл кезеңдегі математиктер барлық тұжырымдарды геометриялық формада өрнектеген. Мысалы, сандарды қосу ретінде кесінділерді қосуды, екі санның көбейтіндісі ретінде тіктөртбұрыш ауданын (мұнда көбейткіштердің кішісі тіктөртбұрыштың ені, ал екіншісі – ұзындығы ретінде алынған), ал үш санның көбейтіндісін тік параллелепипедтің көлемі ретінде қабылдаған. Өрине, алгебралық түсініктерге геометриялық көзқарас оның дамуына едәуір кедергі болып келді. Өйткені, мысалы, үштен артық сандарды көбейту туралы өңгіме қозғау мүмкін емес еді.

VI ғасырдан бастап математикалық зерттеу жұмыстары Үнді, Қытай, Таяу Шығыс және Орта Азия елдеріне қарай ауысты. Орта Азия және Таяу Шығыс ғалымдарының еңбектерінде алгебра математиканың дербес саласы ретінде қалыптаса бастады. IX ғасырда Орта Азия математигі және астрономы Мұхаммед әл-Хорезми өзінің «Китаб аль-джебр валь-мукабала» атты еңбегінде бір дәрежелі теңдеулерді шешудің жалпы ережелерін келтірген. «Аль-джебр» (қайта қалпына келтіру деген мағынада) сөзінен алгебра атауы туындаған.

Алгебраның қалыптасуына Италия математиктері Н. Тарталья (1499–1557), Дж. Кордано (1501–1576) және француз ғалымдары Ф. Виет (1540–1603), Р. Декарт (1596–1650) үлкен үлес қосты.

1. НАТУРАЛ ЖӘНЕ БҮТІН КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕ

1.1. Натурал көрсеткішті дәреже

1.1.1. Натурал көрсеткішті дәреже ұғымы. Алгебрада өзара тең бірнеше санды көбейтуді дәрежеге шығару амалы ретінде қарастырады.

Мысалы, егер 4 саны өз-өзіне көбейтілсе, онда $4 \cdot 4$ көбейтіндісін 4-тің екінші дәрежесі (4^2); $4 \cdot 4 \cdot 4$ көбейтіндісін 4-тің үшінші дәрежесі (4^3); $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ көбейтіндісін 4-тің төртінші дәрежесі (4^4); т.с.с. дейміз.

Егер a – кез келген сан, ал n 1-ден үлкен натурал сан болса, онда бірдей көбейткіштердің көбейтіндісі a санының n -ші дәрежесі деп аталады да, ол a^n түрінде жазылады:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ рет}} = a^n$$

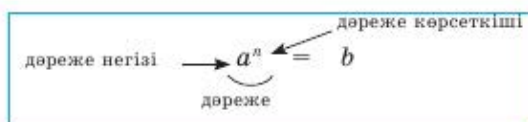
Мұнда a саны дәреженің негізі, ал n натурал саны дәреже көрсеткіші деп аталады, яғни басқаша айтқанда:

- Егер дәреже көрсеткіші 1-ге тең ($n=1$) болса, онда анықтама бойынша $a^1=a$ деп есептейміз, яғни a санының бірінші дәрежесі осы a санының өзіне тең.

- Егер санның дәреже көрсеткіші жазылмаса, онда бұл санның дәрежесі 1-ге тең деп есептейміз.

Сонымен, анықтама бойынша:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ рет}} = a^n, \quad n > 1 \text{ және } a^1 = a.$$



a^n өрнегі былай оқылады: « a -ның n дәрежесі» немесе « a санының n -ші дәрежесі». Мәселен, жоғарыда қарастырылған мысалдарда дәреженің негізі ретінде 4 саны алынып, оның екінші, үшінші, төртінші дәрежелерін қарастырдық. Енді дәрежелерді есептейік:

$$4^2=16, \quad 4^3=64, \quad 4^4=256 \text{ және т.с.с.}$$

Дәрежеге шығаруға мысалдар келтірейік.

а) $5^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=625$; $0^3=0\cdot0\cdot0=0$; $1^5=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1$

ә) $(-3)^3=(-3)(-3)(-3)=-27$; $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16$

б) $10^1=10$.

- Оң санды дәрежеге шығарғанда оң сандар алынады.

Нөл мен 1-ді нөлден өзге дәрежеге шығарғанда, сәйкесінше 0 (нөл) және 1 алынады.

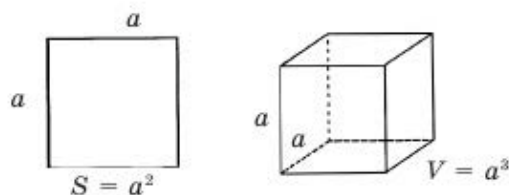
- Теріс санды дәрежеге шығарғанда оң сан да, теріс сан да алынуы мүмкін.

1) Теріс санның дәреже көрсеткіші *жұп сан* болса, нәтижесінде оң сан шығады, өйткені теріс сандарды бір-біріне жұп рет көбейткенде оң сан аламыз.

2) Теріс санның дәреже көрсеткіші *тақ сан* болса, нәтижесінде теріс сан шығады, себебі теріс санды өзіне-өзін тақ рет көбейткенде теріс сан шығады.

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{егер } n - \text{жұп болса,} \\ -a^n, & \text{егер } n - \text{тақ болса.} \end{cases}$$

Санның екінші дәрежесін сол санның **квадраты** деп, ал үшінші дәрежесін **кубы** деп атайды. Бұл атаулар мынадан шыққан: қабырғасы a -ға тең квадраттың (шаршының) ауданы a санының екінші дәрежесімен өрнектеледі: $S=a^2$ (квадрат бірлік), ал қыры a -ға тең кубтың (текшенің) көлемі a санының үшінші дәрежесімен өрнектеледі: $V=a^3$ (куб бірлік) (1.1-сурет).



1.1-сурет

1-мысал. 1) $2\cdot3^3$; 2) $(2\cdot3)^3$ өрнектерінің мәнін табайық.

Шешуі: 1) $2\cdot3^3=2\cdot3\cdot3\cdot3=2\cdot27=54$;

2) $(2\cdot3)^3=2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3=6^3=6\cdot6\cdot6=216$.

2-мысал. $-3^4+(-2)^6$ өрнегінің мәнін табу керек.

Шешуі: 1) $-3^4=-81$; 2) $(-2)^6=2^6=64$; 3) $-81+64=-17$.

Сонымен, $-3^4+(-2)^6=-17$.



1. Санның натурал көрсеткішті дәрежесі деп нені айтады?
2. Дәреженің негізі деп нені айтады?
3. Дәреже көрсеткіші деп нені айтады?
4. Санның дәрежесіне мысалдар келтіріп, оларды оқыңдар.
Дәреже көрсеткіші мен негіздерін көрсетіңдер.
5. Дәреже көрсеткіші 1-ге тең санды қалай жазады?
6. Теріс санның жұп дәрежесінің таңбасы қандай?
7. Теріс санның тақ дәрежесінің таңбасы қандай?



Қыры 1 дм болатын куб пішінді ыдыстағы сұйық мөлшері 1 литрге тең.
Қыры 1,5 м куб пішінді бассейнге неше литр су сыятынын анықтаңдар.

Жаттығулар

A

1.1. Көбейтіндіні дәреже түрінде жазыңдар.

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ | 4) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ | 7) $u \cdot u \cdot b \cdot b$ |
| 2) $0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3$ | 5) $\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$ | 8) $m \cdot x \cdot x + n \cdot n \cdot y \cdot y \cdot y$ |
| 3) $(-2)(-2)(-2)$ | 6) $(ax) \cdot (ax) \cdot (ax) \cdot (ax) \cdot (ax)$ | 9) $2 \cdot x \cdot x \cdot z \cdot z + y \cdot y \cdot y$ |

1.2. Есептеңдер.

- | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------------------|
| 1) $(-3)^3$ | 2) $(-2)^4$ | 3) $(-4)^3$ | 4) $(-5)^2$ | 5) 4^4 |
| 6) 2^5 | 7) 7^3 | 8) 8^2 | 9) $2,5^2$ | 10) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ |

1.3. Дәрежеге шығаруды орындаңдар.

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ | 2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ | 3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ | 4) $0,3^3$ |
| 5) $0,1^3$ | 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4$ | 7) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ | 8) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$ |

1.4. Дәрежені көбейтінді түрінде жазыңдар.

- | | | | | | | |
|----------|----------|----------|-------------|------------------|-------------|--------------|
| 1) a^3 | 2) b^5 | 3) x^3 | 4) $(cx)^3$ | 5) $2 \cdot y^5$ | 6) $(-m)^5$ | 7) $(-mn)^4$ |
|----------|----------|----------|-------------|------------------|-------------|--------------|

1.5. Кестелерді толтырыңдар.

1)

x	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	-0,3
x^2								16						

2)

x	1	2	3	4	5
2^x					
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$					
3^x					
$(-1)^x$					
$(-2)^x$					

- 1.6. 1) Санның квадраты түрінде жазыңдар: 0,01; 0,49; 121; $\frac{36}{169}$; $1\frac{56}{169}$; 0,0009.
 2) Санның кубы түрінде жазыңдар: 27; - 64; 343; - 0,008; $-\frac{1}{125}$; $4\frac{17}{27}$.
- 1.7. Өрнектердің мәнін табыңдар.
 1) x^2 ; $-x^2$; $(-x)^2$, мұндағы $x=5$; -4
 2) x^3 ; $-x^3$; $(-x)^3$, мұндағы $x=3$; -2
- 1.8. $x=-2$, $y=3$, $n=4$ деп алып, x^n+y^n өрнегінің мәнін есептендер.

В

- 1.9. Есептендер.
 1) $-5^2+(-2)^4$ 2) $3^4 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$;
 3) $0,2 \cdot 5^3 - 0,4 \cdot 2^4$ 4) $8 \cdot 0,5^3 + 125 \cdot 0,2^2$
- 1.10. Салыстырыңдар.
 1) $(-0,5)^2$ және 0 2) $-0,5^3$ және 0
 3) $(-0,5)^3$ және 0 4) $(-1,1)^2$ және $0,3^2$
 5) $-1,1^4$ және $(-0,3)^4$ 6) $(-2,7)^{10}$ және $(-9,2)^{13}$
- 1.11. Өрнектерді ықшамдап жазыңдар.
 1) $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{20 \text{ рет}}$ 2) $(-a)(-a)(-a)(-a)(-a)$
 3) $(x-y)(x-y)(x-y)$ 4) $\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ рет}}$
- 1.12. Сандарды 5-тің дәрежесі түрінде жазыңдар: 25; 125; 625; 15625.

1.13. Өрнектерді ықшамдаңдар.

1) $2a^2 + a^2$

2) $x^2 + 3x^2 - 5x^2$

3) $3aa + aa + bbb + bbb$

4) $\frac{xx + xx + xx}{yy + yy + yy}$

1.14. Өрнектердің мәнін табыңдар.

1) $3a^2 - 2b^3$, мұндағы $a = -17$, $b = -2$

2) $5x^2y^3 + 4(x - y)$, мұндағы $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$

3) $m^2 + 2mn + n^2$, мұндағы $m = -5$, $n = 4$

4) $3pq^2 - 2p^2q$, мұндағы $p = -4$, $q = 3$

1.15. Өрнек түрінде жазыңдар:

1) x пен y -тің қосындысының квадраты; 2) x пен y -тің квадраттарының қосындысы; 3) x -тің квадраты мен y -тің кубының үш еселенген көбейтіндісі; 4) x пен y -тің айырмасының екі еселенген кубы.

1.16. a -ның кейбір мәндерінде $2a^2$ және $(a-5)^4$ өрнектері теріс мәндер қабылдауы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

С

1.17. $a = -1$; 0 ; 2 болғанда $2a^5 - 5a^4 + a^3 - 3a^2$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

1.18. Өрнектердің сан мәнін табыңдар.

1) $\frac{2a^4 - 3b^3}{1 - a^2}$, мұндағы $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{3}$

2) $\frac{2m^2 - 4m - 1}{m^2 + m + 1}$, мұндағы $m = -\frac{3}{4}$

3) $\frac{3x^2 + 5y}{2x - 1} + \frac{x^2 - 2y^3}{3 - 4y}$, мұндағы $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$

4) $\frac{1 - 2ab}{3a^2b} - \frac{2 + 3ab^2}{4ab^3}$, мұндағы $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$

1.19. $x^4 + 1$ және $3 + (4 - x)^2$ өрнектері тек оң мәндер қабылдайтынын дәлелдеңдер.

Көмек. Мысалы $3a^8 + a^2$ өрнегі тек оң мәндер қабылдайтынын дәлелдейік. Дәреже көрсеткіші жұп сан болатын кез келген сан оң сан болады. Сондықтан кез келген a үшін қосындының мәні оң сан болады.

1.20. $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 4 = 0$ теңдеуінің оң түбірі болмайтынын көрсетіңдер.

1.21. Теңдік кез келген a үшін орындала ма?

1) $|a|^2 = a^2$ 2) $|a|^3 = a^3$

Қайталауға арналған жаттығулар

1.22. Теңдеулерді шешіңдер.

1) $0,12 - 2,5x = -0,8$

3) $1\frac{3}{4} - 5x = 2\frac{3}{4} : \left(-3\frac{2}{3}\right)$

2) $4,8x - 0,3 = 4,2 \cdot 0,5$

4) $20x + 0,4 \cdot \left(-6\frac{1}{4}\right) = 4\frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{4}\right)$

1.23*. a мен b -нің қандай мәндерінде $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + ay = b \end{cases}$ жүйесінің: 1) бір шешімі бар; 2) шексіз көп шешімі бар; 3) шешімі болмайды?

1.24. a мен b сандарының екі еселенген қосындысының квадратынан осы сандардың үш еселенген айырмасын азайтып, нәтижесін:

1) $a=6$, $b=-4$; 2) $a=3$, $b=-5$ болғанда есептеңдер.

1.25. Қандай шарттар орындалғанда $\frac{a-1}{2}$ өрнегінің мәні:

1) оң сан; 2) теріс сан; 3) бүтін сан; 4) нөлге тең болады?

1.1.2. Дәрежелерді көбейту және бөлу. Санның көрсеткіші нөлге тең дәрежесі

a^3a^5 өрнегі негіздері бірдей екі дәреженің көбейтіндісі түрінде жазылған және оны негізін өзгертпей, былайша жазуға болады:

$$a^3 \cdot a^5 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8.$$

Олай болса,

$$a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8,$$

яғни a^3a^5 көбейтіндісі негізі a -ға тең, ал дәреже көрсеткіші көбейткіштердің дәреже көрсеткіштерінің қосындысына тең дәреже болады. Осы сияқты қасиет кез келген негіздері бірдей дәрежелер үшін орындалады.

Кез келген a саны мен кез келген n және m натурал сандары үшін келесі теңдік орындалады:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (1)$$

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ рет}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ рет}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n+m) \text{ рет}} = a^{n+m}.$$

Негіздері бірдей дәрежелерді көбейткенде, олардың дәреже көрсеткіштерін қосып, негізін өзгеріссіз қалдырады.

Дәлелденген (1) формула дәреженің негізгі қасиеті болып табылады. Бұл формула үш және одан да көп дәрежелердің көбейтіндісі үшін де орындалады. Мысалы, $a^n \cdot a^m \cdot a^k = a^{n+m+k}$.

Мысалдар келтірейік:

$$b^2 \cdot b^7 = b^{2+7} = b^9; \quad y^3 \cdot y^4 = y^{3+4} = y^7; \quad x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^{1+2+3} = x^6.$$

$a^9 : a^5$ өрнегі негіздері бірдей екі дәреженің бөліндісі және $a \neq 0$ болғанда, оны негізі a болатын дәреже түрінде жазуға болады. Шынында да, $a^5 \cdot a^4 = a^9$ болғандықтан, бөліндінің анықтамасы бойынша $a^9 : a^5 = a^4$, яғни $a^9 : a^5 = a^{9-5}$. Осыдан $a^9 : a^5$ бөліндісін осы негізбен дәреже көрсеткіші бөлінгіш пен бөлгіш дәреже көрсеткіштерінің айырмасына тең болатындай, дәреже түрінде жазуға болатыны шығады.

Осы сияқты, $n > m$ болатын n және m натурал сандары мен кез келген $a \neq 0$ саны үшін келесі теңдік орындалады:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (2)$$

Шынында да, бұл

$$a^n = a^{m+(n-m)} = a^m \cdot a^{n-m}$$

теңдігінен шығады. Бөліндінің анықтамасы бойынша:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Дәлелденген қасиеттен мынадай ереже шығады:

Негіздері бірдей дәрежелерді бөлгенде, олардың дәреже көрсеткіштерін азайтып, негізін өзгеріссіз қалдырады.

Мысалы,

$$x^{10} : x^3 = x^{10-3} = x^7; \quad m^8 : m^5 = m^{8-5} = m^3; \quad q^5 : q = q^{5-1} = q^4.$$

a^n -ін a^m -не бөлудің бұл ережесі $n > m$ болғанда ғана орындалады. Егер $n = m$ болса, онда дәрежелерді бөлу ережесі бойынша

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^0$$

теңдігі орындалады. Екінші жағынан,

$$a^n : a^n = 1$$

теңдігі орындалады. Сондықтан кез келген $a \neq 0$ болғанда, мына теңдік орындалады:

$$a^0 = 1$$

Нөлден өзге a санының нөл дәрежесі 1-ге тең.

Мысалы, $3^0 = 1$, $(-5, 2)^0 = 1$. 0^0 өрнегінің мағынасы жоқ.

(1) формуланы $a \neq 0$ болғанда кез келген теріс емес бүтін n және m сандары үшін қолдануға болады, ал (2) формуланы $a \neq 0$ болғанда $n \geq m$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n , m теріс емес бүтін сандары үшін қолдануға болады.



- Негіздері бірдей дәрежелерді көбейту формуласын жазып, сәйкес ережені айтып беріңдер.
- Негіздері бірдей дәрежелерді бөлу формуласын жазып, сәйкес ережені айтып беріңдер.
- (1) және (2) формулаларды дәлелдеңдер.
- Нөлден өзге кез келген санның нөл дәрежесі неге тең?
- 0^0 өрнегінің мағынасы бар ма?



- 3-ке; 2) 4-ке; 3) 7-ге; 4) 8-ге аяқталатын сандардың натурал көрсеткішті дәрежелерінен шыққан сан қандай цифрлармен аяқталады? Оны анықтау алгоритмін көрсетіңдер.

Жаттығулар

A

1.26. Көбейтіндіні дәреже түріне келтіріңдер.

- | | | | |
|--|--------------------|--------------------|------------------------|
| 1) $a^3 \cdot a^4$ | 2) $a \cdot a^5$ | 3) $x^5 \cdot x^3$ | 4) $0,5^3 \cdot 0,5^7$ |
| 5) $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$ | 6) $p^2 \cdot p^3$ | 7) $q^4 \cdot q^5$ | 8) $y^3 \cdot y^5$ |

1.27. Көбейтіндіні дәреже түрінде жазыңдар.

- | | | | |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1) $n^{12} \cdot n^5$ | 2) $m^5 \cdot m^{17}$ | 3) $c^3 \cdot c^4$ | 4) $a^6 \cdot a^7$ |
| 5) $a^{16} \cdot a^7$ | 6) $p^{10} \cdot p^{11}$ | 7) $b \cdot b \cdot b^2$ | 8) $x^2 \cdot x \cdot x^3$ |

1.28. Дәреже түріне келтіріңдер.

- 1) $2^5 \cdot 64$ 2) $0,2^6 \cdot 0,04$ 3) $3^4 \cdot 81$
 4) $6^{12} \cdot 36$ 5) $0,25^7 \cdot \frac{1}{64}$ 6) $0,0001 \cdot 0,1^5$

1.29. Бөліндіні дәреже түріне келтіріңдер.

- 1) $a^5 : a^2$; 3) $-c^{15} : c^5$; 5) $x^{11} : x^7$ 7) $q^{12} : q^3$;
 2) $b^{20} : b^{12}$; 4) $0,5^{17} : 0,5^{10}$ 6) $p^{19} : p^9$; 8) $7^{20} : 7^{12}$

1.30. Бөлуді орындаңдар.

- 1) $p^{12} : p^2$; 2) $a^{16} : a^7$ 3) $10^{21} : 10^{12}$;
 4) $y^9 : y$ 5) $2,3^{17} : 2,3^8$; 6) $q^{12} : q^8$

1.31. Өрнектердің мәнін табыңдар.

- 1) $5^8 : 5^6$ 2) $0,2^7 : 0,2^5$ 3) $1,99^{13} : 1,99^{12}$
 4) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4 : \left(1\frac{2}{3}\right)^2$ 5) $\left(-\frac{3}{7}\right)^5 : \left(-\frac{3}{7}\right)^4$ 6) $\left(2\frac{3}{5}\right)^6 : \left(2\frac{3}{5}\right)^4$

1.32. Өрнектерді ықшамдаңдар.

- 1) $a^5 \cdot a^0$ 2) $b^6 : b^0$ 3) $p^4 \cdot p^0$ 4) $x^8 : x^0$

1.33. Есептеңдер.

- 1) $4^2 \cdot 4$ 2) $1,1 \cdot 1,1^2$; 3) $5^5 : 5^3$ 4) $\left(2\frac{3}{5}\right)^6 : \left(2\frac{3}{5}\right)^4$

1.34. Өрнектерді ықшамдаңдар.

- 1) $a \cdot a^3 \cdot a^5$ 2) $a^7 : a^5$ 3) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^5$
 4) $m^{10} : m^7$ 5) $y^{12} : y^{11}$ 6) $c^5 \cdot c^{10} \cdot c$

В

1.35. Сандар қандай цифрмен аяқталатынын есептеп табыңдар.

- 1) 2^{17} 2) 3^{15} 3) 7^{12} 4) 9^9

1.36. Дәреже түрінде жазыңдар.

- 1) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^7$ 2) $a \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot a$ 3) $4 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^2$
 4) $y^4 \cdot y^3 \cdot y^2$ 5) $m^5 \cdot m \cdot m^3 \cdot m^6$ 6) $7^3 \cdot 7 \cdot 7^7$

1.37. x^{12} өрнегін негіздері бірдей екі көбейткіштің бірі: 1) x^6 ; 2) x^2 ; 3) x^7 ; 4) x^{12} өрнегіне тең болатындай етіп, екі көбейткішке жіктеңдер.

1.38. Егер квадрат қабырғасының ұзындығын: 1) 2 есе; 2) 2,5 есе; 3) 0,5 есе; 4) $\frac{1}{3}$ есе; 5) 1,5 есе арттырса, оның ауданы қалай өзгереді?

Көмек. 5) Квадрат қабырғасының ұзындығын 1,5 есе арттырса, оның ауданы қалай өзгереді?

Квадраттың ауданы $S = a^2$ екенін білеміз, мұндағы a – берілген квадрат қабырғасының ұзындығы. Есептің шарты бойынша жаңа квадрат қабырғасының ұзындығы $1,5a$ -ға тең болады, ал ауданы сәйкесінше $S_1 = (1,5a)^2 = 2,25a^2$ -қа тең. $\frac{S_1}{S} = \frac{2,25a^2}{a^2} = 2,25$.

Жауабы: квадраттың ауданы 2,25 есе артады.

1.39. Квадраттың ауданын 9 есе үлкейтсе, оның қабырғасының ұзындығы неше есе артады?

1.40. Квадрат қабырғасының ұзындығын 2 есе арттырып, содан соң 3 есе кемітсе, оның ауданы қалай өзгереді?

1.41. Бөлшектің мәні натурал n санына тәуелсіз болатынын көрсетіндер.

$$1) \frac{6^{n+1} \cdot 6^{n+2}}{6^{2n}}; \quad 2) \frac{5^{2n+4} \cdot 5^{2n-1}}{5^{4n+2}}$$

1.42. Қандай да бір тәсілмен: 1) a^{10} ; 2) b^{12} ; 3) x^{11} ; 4) 3^{12} өрнектерін осы негіздегі екі дәреженің көбейтіндісіне жіктеңдер.

1.43. Бөлшектердің мәнін табыңдар.

$$1) \frac{5^6}{5^4} \quad 2) \frac{9^{12}}{9^{11}} \quad 3) \frac{0,8^5}{0,8^3}$$

$$4) \frac{\left(-1\frac{1}{2}\right)^4}{-1\frac{1}{2}} \quad 5) \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^7}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} \quad 6) (1,3)^9 : \left(\frac{13}{10}\right)^7$$

1.44. Есептендер.

$$1) \frac{17^9 \cdot 17^5}{17^{13}} \quad 2) \frac{4^{15}}{4^5 \cdot 4^5} \quad 3) \frac{5^{16} \cdot 5^4}{5^{18}} \quad 4) \frac{0,3^{12}}{0,3^4 \cdot 0,3^5}$$

1.45. Егер куб қырының ұзындығын: 1) 2 есе; 2) 2,5 есе; 3) 0,5 есе; 4) $\frac{1}{3}$ есе кемітсе, оның көлемі қалай өзгереді?

- 1.46. Кубтың көлемі 125 см^3 . Егер куб қырының ұзындығын 5 есе кемітсе, оның көлемі қалай өзгереді?
- 1.47. Кубтың қырын 2 есе ұзартып, содан соң 4 есе қысқартса, оның көлемі қалай өзгереді?
- 1.48. Өрнектерді ықшамдаңдар.
- 1) $(a^5 \cdot a^3 + a^8 \cdot a^0) : a^7$ 2) $x^{12} : (2x^3 \cdot x^4 - x^2 \cdot x^5)$
- 1.49. Өрнектерді дәреже түріне келтіріңдер.
- 1) $2^5 \cdot 8 \cdot 16$ 2) $16 \cdot 64 \cdot 128$ 3) $7^a \cdot 343$ 4) $243 \cdot 3^k$

C

- 1.50. Көбейтіндінің мәні қандай цифрмен аяқталатынын есептеп табыңдар.
- 1) $2^{101} \cdot 3^{102}$ 2) $101^{2025} \cdot 17^{30}$ 3) $13^9 \cdot 5^{75}$

Көмек. Мысалы, $61^4 + 12^{13}$ өрнегінің мәні қандай цифрмен аяқталатынын есептеп табайық.

1) 61^4 санының соңғы цифрын табамыз. Жазылуында 1 цифрымен аяқталатын санды дәрежеге шығарса, нәтижесінде 1-мен аяқталатын сан шығады. Демек, 61^4 санының дәрежесі 1-мен аяқталады.

2) 12^{13} санының соңғы цифрын табайық.

$$12^1 = 12$$

$$12^2 = 144$$

$$12^3 = 1728$$

$$12^4 = 20736$$

$$12^5 = 248832$$

Соңғы цифрлар мынадай ретпен (циклмен) қайталанып тұрғанын байқауға болады: 2, 4, 6, 8 және т.б. Циклдың ұзындығы 4-ке тең. 12^{13} саны қандай цифрмен аяқталатынын табу үшін дәреже көрсеткішті, яғни 13-ті 4-ке бөлеміз: $13 : 4 = 3$ (қалд. 1). 1 қалдық жоғарыда берілген циклдағы бірінші цифрды көрсетеді. Демек, 12^{13} саны 12^1 саны сияқты 2 цифрымен аяқталады.

3) Енді $61^4 + 12^{13}$ қосындысының мәнін қарастырайық.

61^4 санының соңғы цифры 1-мен, 12^{13} -тің соңғы цифры 2-мен аяқталады. Осы цифрлардың мәнін қосамыз: $1+2 = 3$. Сонымен берілген қосынды мәнінің соңғы цифры 3-пен аяқталады.

1.51. Теңбе-теңдік шығатындай етіп, x -ті a -ның дәрежесімен алмастырыңдар.

$$1) a^3 \cdot x = a^5; \quad 2) x \cdot a^4 = a^8 \quad 3) a^7 \cdot x = a^{11} \quad 4) a^5 \cdot x = a^{10}$$

1.52. n -нің кез келген натурал мәнінде $\frac{10^n - 1}{9}$ бөлшегінің мәні натурал сан болатынын дәлелдеңдер.

1.53. n -нің кез келген натурал мәндерінде $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

1.54. Өрнектердің таңбасын анықтаңдар: 1) a^{2n} ; 2) a^{2n+1} .
Мұндағы $a < 0$, ал $n \geq 0$ – бүтін сан.

1.55. Ықшамдаңдар: 1) $7^{n+2} : 7^n$; 2) $10^{n+1} : 10^{n-1}$; 3) $(-1)^n \cdot (-1)^n$.

1.56. $x^4 + 4 = 0$ теңдеуінің шешімі жоқ екенін дәлелдеңдер.

1.57. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) 125m^4 p^5 : (-0,25m^3 p^2) : 25mp$$

$$2) 0,125a^{n+13} \cdot b^{n+12} : \left(-\frac{1}{8}a^4 b^3 : 5a^9 b^5 \right), \quad n \in N$$

Қайталауға арналған жаттығулар

1.58. Сандарды квадрат немесе куб түрінде жазыңдар: 1) -27 ; 2) $1,69$; 3) $6,25$; 4) -64 ; 5) $-3\frac{3}{8}$; 6) $5\frac{4}{9}$.

1.59. $y = 2x - 6$ тәуелділігінің координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін табыңдар.

1.60. $y = 2x - 6$ және $y = -\frac{1}{2}x + 1$ теңдеулерімен берілген түзулердің қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

1.61. Үш студент стипендия алды. Біріншісі екінші студент алған соманың $0,9$ бөлігіндей және оған қоса 4200 тг, ал үшінші студент екінші студент алған соманың $0,9$ бөлігіндей және оған қоса 1200 тг алды. Егер екінші және үшінші студенттердің тең мөлшерде стипендиялар алғаны белгілі болса, онда әрбір студент қанша стипендия алған?

1.1.3. Көбейтіндіні, бөлшекті және дәрежені дәрежеге шығару

$(a \cdot b)^3$ өрнегі – a және b сандары көбейтіндісінің дәрежесі. Бұл өрнекті a мен b дәрежелерінің көбейтіндісі түрінде жазуға болады:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3,$$

яғни

$$(ab)^3 = a^3 \cdot b^3.$$

Жалпы жағдайда, кез келген a , b сандары мен кез келген натурал n саны үшін мына теңдік орындалады:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n \quad (3)$$

Көбейтіндіні дәрежеге шығару үшін көбейткіштердің әрқайсысын осы дәрежеге шығарып, нәтижелерін көбейтеді.

Дәлелдеуі. Дәреженің анықтамасы бойынша:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_n \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_n = a^n b^n. \quad (4)$$

Дәлелденген қасиет үш және одан да көп көбейткіштер үшін де орындалады. Мысалы,

$$(abc)^n = a^n b^n c^n \text{ және т. с. с.}$$

1-мысал. Зах көбейтіндісін үшінші дәрежеге шығарайық.

Шешуі: $(3ax)^3 = 3^3 a^3 \cdot x^3 = 27a^3 x^3$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n$ өрнегі – бөлшектің дәрежесі. Бұл өрнекті дәрежелердің бөліндісі түрінде жазуға болады.

Кез келген a және b ($b \neq 0$) сандары мен кез келген натурал n саны үшін мына теңдік орындалады:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (5)$$

Дәлелдеуі. $\frac{a}{b} = c$ деп алайық. Онда $a = b \cdot c$. Бұл теңдіктің екі жақ бөлігін де n дәрежеге шығарып, (3) формуланы қолданамыз:

$$a^n = (b \cdot c)^n = b^n \cdot c^n.$$

Осыдан бөлшектің анықтамасы бойынша $\frac{a^n}{b^n} = c^n$ теңдігін аламыз.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = c^n, \text{ осыдан } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Бөлшектің бұл қасиетін былай жалпылауға болады:

$$\left(\frac{ab}{cxy}\right)^n = \frac{a^n b^n}{c^n x^n y^n}.$$

Бөлшекті дәрежеге шығарғанда, оның алымының да, бөлімінің де әрбір көбейткішін осы дәрежеге шығарады.

2-мысал. $\frac{2xy}{3ab}$ бөлшегін 5-дәрежеге шығару керек.

$$\text{Шешуі: } \left(\frac{2xy}{3ab}\right)^5 = \frac{(2xy)^5}{(3ab)^5} = \frac{2^5 x^5 y^5}{3^5 a^5 b^5} = \frac{32 \cdot x^5 \cdot y^5}{243 \cdot a^5 \cdot b^5}.$$

$(a^3)^4$ өрнегі – негізі a -ның дәрежесі болатын өрнектің дәрежесі, оны негізі a болатын дәреже түрінде былай жазуға болады:

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4}.$$

Кез келген a саны мен кез келген n және m натурал сандары үшін мына теңдік орындалады:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (6)$$

Дәрежені дәрежеге шығарғанда, негізін өзгертпей, дәреже көрсеткіштерін көбейтеді.

Дәлелдеуі. Дәреженің анықтамасы бойынша:

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_m = a^{\overbrace{n+n+\dots+n}^m} = a^{n \cdot m}.$$

Мысалы,

$$(x^4)^5 = x^{4 \cdot 5} = x^{20}; \quad (a^2 \cdot b^3)^4 = a^{2 \cdot 4} b^{3 \cdot 4} = a^8 \cdot b^{12}.$$



Ежелгі Вавилонда сандардың квадраты мен кубы кестелері қолданылған. Үнді ғалымдары дәреже көрсеткіші 9-ға дейінгі сандарға амалдар қолдана білген. Самарқан ғалымы әл-Каши (XIV–XV) еңбектерінде $a^0=1$, $a \neq 0$ ұғымы қолданылса, Рене Декарт (1596–1650) өзінің «Геометрия» атты еңбегінде a^2 , a^3 , ... сияқты белгілеулерді қолданған.



1. Көбейтіндіні дәрежеге шығару ережесін айтыңдар.
2. Бөлшекті дәрежеге шығару ережесін айтыңдар.
3. Дәрежені дәрежеге шығару ережесін айтыңдар.
4. (3), (5), (6) формулаларды дәлелдеңдер.



1. Үш тіктөртбұрыш салыңдар: біріншісінің өлшемдері 4 см және 6 см; екіншісінің өлшемдері 2 см және 3 см; үшіншісінің өлшемдері 8 см және 12 см.

Үшеуінің де аудандарын анықтап, оларды салыстырыңдар. Қорытынды жасап, жауаптарыңды негіздеңдер.

2. Екі тік параллелепипед берілген. Біріншісінің өлшемдері: 2 см, 3 см, 4 см. Екіншісінің өлшемдері: 4 см, 6 см, 8 см. 1) Параллелепипедтің толық беті аудандары мен көлемдерін анықтаңдар. 2) Толық беті аудандарын салыстырыңдар. 3) Көлемдерін салыстырыңдар. 4) Қорытынды жасап, жауаптарыңды негіздеңдер.

Жаттығулар

А

1.62. Көбейтіндіні дәрежеге шығарыңдар.

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|-----------------|
| 1) $(ab)^5$ | 2) $(3x)^4$ | 3) $(-5y)^3$ | 4) $(-0,5pq)^4$ |
| 5) $(xyz)^4$ | 6) $(-2m)^6$ | 7) $(4nk)^3$ | 8) $(-0,2cd)^3$ |

1.63. Дәрежеге шығаруды орындаңдар.

- | | | | |
|--------------|---------------|-----------------|---------------|
| 1) $(xy)^4$ | 2) $(-na)^3$ | 3) $(10ab)^2$ | 4) $(-5x)^4$ |
| 5) $(mnk)^3$ | 6) $(-3pq)^3$ | 7) $(-2abxy)^4$ | 8) $(-3px)^3$ |

1.64. Есептеңдер.

- | | | | |
|--------------------|--------------------|----------------------|---------------------|
| 1) $(2 \cdot 5)^4$ | 2) $(2 \cdot 3)^3$ | 3) $(2 \cdot 100)^2$ | 4) $(7 \cdot 20)^2$ |
|--------------------|--------------------|----------------------|---------------------|

1.65. Дәрежеге шығарыңдар.

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1) $(a^3)^3$ | 2) $(x^5)^2$ | 3) $(y^2)^5$ | 4) $(c^3)^4$ |
| 5) $(b^3)^2$ | 6) $(b^4)^4$ | 7) $(m^7)^2$ | 8) $(p^5)^6$ |

1.66. Дәрежеге шығарыңдар.

- | | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\left(\frac{xy}{a}\right)^5$ | 2) $\left(-\frac{c}{ab}\right)^3$ | 3) $\left(\frac{x^2y}{ab}\right)^4$ | 4) $\left(\frac{an}{m}\right)^7$ |
| 5) $\left(\frac{p^2}{q^3}\right)^3$ | 6) $\left(\frac{-y}{x}\right)^5$ | 7) $\left(\frac{xy}{bc}\right)^3$ | 8) $\left(-\frac{2ab}{3x}\right)^5$ |

1.67. Көбейтіндіні дәреже түріне келтіріңдер.

- | | | |
|-------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) a^4y^4 | 2) $a^3x^3y^3$ | 3) $81c^4$ |
| 4) b^6x^6 | 5) $(-m)^4 \cdot n^4$ | 6) $0,0016 \cdot p^4$ |

1.68. Негізі a болатындай дәреже түріне келтіріңдер.

1) $(a^5)^2 \cdot a$

2) $a^3 \cdot a^3$

3) $a \cdot a^2 \cdot a^3$

4) $((a^2)^3)^4$

5) $(a^2 \cdot a^3)^2$

6) $a^2 \cdot (a^3)^4 \cdot a$

1.69. Негізі b болатындай дәреже түріне келтіріңдер.

1) $(b^2)^3$

2) $b \cdot b^7$

3) $(b^3)^4$

4) $(-b^3)^2$

5) $b^3 \cdot b^3$

6) $(b^3)^3$

1.70. x -тің дәрежесі түрінде жазыңдар.

1) $(x^2)^5 : (x^3)^2$

2) $(x^3)^4 : (x^2)^5$

3) $(x^3 : x^2)^5$

4) $\left(\frac{x^4}{x}\right)^3$

В

1.71. Өрнектерді ықшамдаңдар.

1) $a^3 \cdot (a^2)^4$

2) $(a^2)^4 \cdot (a^4)^3$

3) $(p^2 \cdot p^3)^2$

4) $(m^2 \cdot m^3)^3$

5) $(x^2)^5 \cdot x^5$

6) $(y^2 \cdot y^3)^4$

1.72. Өрнектерді ықшамдаңдар.

1) $\frac{(x^2 \cdot x)^4}{(x^3)^2}$

2) $\frac{(ab)^2 \cdot a^3 \cdot b^4}{a \cdot (ab)^3}$

3) $\frac{(a^2 \cdot x^3)^5}{(a^2)^2 \cdot x^5}$

1.73. 1) Қарама-қарсы сандардың квадраттары тең; 2) қарама-қарсы сандардың кубтары қарама-қарсы сандар болатынын дәлелдеңдер.

1.74. Егер қабырғасының ұзындығын 3 есе ұзартса, квадраттың ауданы қалай өзгереді?

1.75. Егер кубтың қырын екі есе ұзартса, көлемі өзгере ме?

1.76. Негізі x болатын дәреже түріне келтіріңдер.

1) $x^2 \cdot x^m$

2) $x^m \cdot x$

3) $(x^2)^n$

4) $(x^n)^3$

5) $(x^3)^n$

1.77. Негізі 3-ке тең дәреже түрінде жазыңдар.

- 1) 9^5 2) 27^3 3) 81^4 4) 243^2

1.78. 5^{20} санын негізі: 1) 5^2 ; 2) 25^2 ; 3) 5^{10} ; 4) 625; 5) 5^5 болатындай дәреже түріне келтіріңдер.

1.79. Есептеңдер.

- 1) $\frac{2^5 \cdot (2^3)^3}{2^{13}}$ 2) $\frac{(5^8)^2 \cdot 5^7}{5^{20}}$ 3) $\frac{(5^5)^2}{25 \cdot 5^6}$ 4) $\frac{81 \cdot 3^6}{(3^4)^3}$

С

1.80. x^{20} өрнегін бірнеше тәсілмен дәреженің дәрежесі түрінде жазыңдар.

1.81. Егер $a^3=k$ болса, a^{12} -ін табыңдар.

1.82. Егер $a^3=p$ және $b^3=q$ болса, $\left(\frac{a^3}{b^3}\right)^6$ өрнегі неге тең болады?

1.83. 1) 2^{15} ; 2) 5^6 санын неше тәсілмен көрсеткіші 1-ден өзгеше дәреже түрінде жазуға болады?

1.84. Қандай шарт орындалғанда екі санның квадраттарының қосындысы нөлге тең?

1.85. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ теңдеуінің теріс түбірлері болуы мүмкін бе?

1.86. 3^{4k} саны қандай цифрмен аяқталады? Мұндағы k – натурал сан.

1.87. Кез келген натурал n үшін $10^n - 1$ саны 9-ға еселік екенін дәлелдеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

1.88. $A(a; -5)$ нүктесі $B(3; b)$ нүктесіне: 1) абсцисса өсіне; 2) ордината өсіне; 3) координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы. Өрбір жағдай үшін a мен b -ні табыңдар.

1.89. $y=kx+b$ теңдеуімен берілген түзу $A(0; 2)$ және $B(-2; 0)$ нүктелері арқылы өтеді. k мен b -ні табыңдар.

1.90. Элеваторға екі күн ішінде 1440 т бидай әкелінді. Егер екінші күні бірінші күні түскен бидайдың 80%-і әкелінсе, онда бірінші күні элеваторға неше тонна бидай жеткізілді?

1.91*. $7(x^2+2x+5)=13$ теңдеуінің бүтін шешімі болуы мүмкін бе?

1.2. Бүтін көрсеткішті дәреже

1.2.1. Бүтін теріс көрсеткішті дәреже ұғымы. Іс жүзінде өте үлкен сандарды жазу ықшамды болуы үшін негізі 10-ға тең дәрежелерді қолданады. Мысалы, Жерден Күнге дейінгі орташа қашықтық 150 000 000 км немесе қысқаша $150 \cdot 10^6$ км. Жер шарының орташа радиусы 6 370 000 м немесе қысқаша $6,37 \cdot 10^6$ м.

Өте кіші сандардың да жазылуы ықшамды болу үшін негізі 10-ға тең теріс дәрежелерді қолданады. Жуық шамамен су молекуласының диаметрі $\frac{3}{100000000}$ см немесе $3 \cdot 10^{-8}$ см, ал сутегі атомының массасы $1,674 \cdot 10^{-24}$ г және т.с.с.

$150 \cdot 10^6$ км өрнегіндегі 10^6 өрнегін 10 санын өзіне-өзін 6 рет көбейту деп түсінеміз. Ал $3 \cdot 10^{-8}$ өрнегіндегі 10^{-8} өрнегінің мағынасы қандай? Бұның мағынасын ашу үшін 10 санының теріс емес көрсеткішті дәрежелерін тізіп жазайық:

$$10^0; 10^1; 10^2; 10^3; \dots \quad (1)$$

Мұны былай да жазуға болады:

$$1, 10, 100, 1000, \dots$$

Мұнда әрбір сан келесі саннан 10 есе кіші. Енді соңғы тізбекті сол жағына қарай жалғастырып жазып көрелік. Онда 1-дің алдында одан 10 есе кіші $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$ саны, ал $\frac{1}{10}$ -дің алдында одан 10 есе кіші $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$, ал $\frac{1}{10^2}$ -дің алдында одан 10 есе кіші $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$ саны т.с.с. сандар орналасуы қажет:

$$\dots, \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1000, \dots \text{ немесе} \\ \dots, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots \quad (2)$$

(1)-дегі әрбір дәреженің көрсеткіші келесі дәреженің көрсеткішінен 1-ге кем.

(2)-дегі 10^0 -нің оң жағындағы дәреженің көрсеткіші келесі дәреженің көрсеткішінен 1-ге кем. Осы заңдылықты 10^0 дәрежесінің сол жағындағыларға қолдансақ, олар 10-ның теріс көрсеткіштері түрінде жазылды:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}; \quad \frac{1}{10^2} = 10^{-2}; \quad \frac{1}{10^3} = 10^{-3}, \text{ т.с.с.}$$

Сонда:

$$\dots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots \quad (3)$$

болуы керек. (2) және (3) жазуларды салыстыра отырып, 10^{-1} саны $\frac{1}{10}$ -ге, 10^{-2} саны $\frac{1}{100}$ -ге және т.с.с. тең деп қабылдауымызға тура келеді. Математикада мұндай келісімдер кез келген нөлге тең емес сандардың бүтін дәрежелері үшін қабылданған.

Анықтама. Нөлге тең емес кез келген a санының $(-n)$ -ші (n – натурал сан) дәрежесі деп a санының n -ші дәрежесіне кері санды айтады.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (4)$$

$$\text{Мысалы, } 10^{-3} = \frac{1}{10^3}; \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Негізі нөлге тең теріс көрсеткішті дәрежесінің мағынасы болмайды.

1.2.2. Бүтін көрсеткішті дәреженің қасиеттері. Натурал көрсеткішті дәрежелер үшін дәлелденген қасиеттер бүтін көрсеткішті дәрежелер үшін де орындалады.

Кез келген a және b сандары мен кез келген бүтін n және m сандары үшін төмендегідей теңдіктер орындалады:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ. a^n \cdot a^m = a^{n+m} & 2^\circ. a^n : a^m = a^{n-m} & 3^\circ. (a^m)^n = a^{mn} \\ 4^\circ. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & 5^\circ. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0 & \end{array}$$

Үлгі ретінде 1° -қасиетті дәлелдейік.

а) егер m және n – теріс емес бүтін сандар болса, онда бұл қасиеттің орындалуы дәлелденген.

ә) $n \geq 0, m < 0$ болса, онда $m = -k$ болатындай k натурал саны табылады. Енді $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ теңдігі орындалатынын көрсетейік:

$$a^n \cdot a^m = a^n \cdot a^{-k} = a^n \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} = a^{n+(-k)} = a^{n+m}.$$

б) $n < 0$, $m < 0$ болсын. Онда k және l натурал сандары табылып, $n = -k$, $m = -l$ теңдіктері орындалады. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ болатынын көрсетейік:

$$a^n \cdot a^m = a^{-k} \cdot a^{-l} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^k \cdot a^l} = \frac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{-k-l} = a^{(-k)+(-l)} = a^{n+m}.$$

Қалған қасиеттер де осы сияқты дәлелденеді.

1-мысал. $5^8 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. $5^8 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2} = 5^{8-3-2} = 5^3 = 125$. Сонымен, $5^8 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2} = 125$.

2-мысал. $243^m : 3^{5m-3}$ санын негізі 3-ке тең дәреже түрінде жазайық.

Шешуі. $243 = 3^5$ болғандықтан, $243^m = (3^5)^m = 3^{5m}$.

Сондықтан $243^m : 3^{5m-3} = 3^{5m} : 3^{5m-3} = 3^{5m-(5m-3)} = 3^{5m-5m+3} = 3^3 = 27$.



1. Теріс көрсеткішті дәреже ұғымына анықтама беріңдер.
2. 1–5 қасиеттерді тұжырымдап, оларға мысал келтіріңдер.
3. Бөлшектің бөліміндегі санды (өрнекті) оның алымына қалай шығаруға болады? Мысал келтіріңдер.
4. Бөлшектің алымындағы санды (өрнекті) оның бөліміне қалай түсіруге болады? Мысал келтіріңдер.
5. Нөл көрсеткішті дәреженің негізі нөлге тең болуы мүмкін бе?



Теріс көрсеткішті дәреже ұғымын XV ғасырда Никола Шюке енгізген. Ағылшын математигі Джон Валлис алғаш рет теріс көрсеткішті дәреже ұғымын қарастыру орынды болатынын атап өткен. Ал жүйелі түрде бұл ұғымды И. Ньютон қолдана бастаған. Ол 1676 жылы жазған бір хатында: «Алгебраистер $A \cdot A$, AA , ... түрінде жазылған өрнектерді A^2 , A^3 , ... арқылы жазып жүр. Ал $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$, $\frac{1}{A^3}$, ... өрнектерін A^{-1} , A^{-2} , A^{-3} , ... түрінде жазып жүрмін», – деп көрсеткен.

Жаттығулар

A

1.92. Теріс көрсеткішті дәрежені бөлшекпен алмастырыңдар.

- 1) 3^{-3} 2) 2^{-3} 3) 5^{-2} 4) a^{-2} 5) b^{-10} 6) x^{-7}

1.93. Бөлшекті теріс көрсеткішті дәрежемен алмастырыңдар.

- 1) $\frac{1}{2^6}$ 2) $\frac{1}{3^6}$ 3) $\frac{1}{10^3}$ 4) $\frac{1}{x^4}$ 5) $\frac{1}{a^9}$ 6) $\frac{1}{625}$

1.94. Өрнектерді бөлшек түріне келтіріңдер.

- 1) $3x^{-5}$ 2) $5xy^{-2}$ 3) $a^{-1}b$ 4) $m^{-2} \cdot n^{-3}$

5) $a^{-3}b^2$

6) $5(xy)^{-2}$

7) $-8mn^{-6}$

8) $7x(x+y)^{-2}$

1.95. Бөлшектерді көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) $\frac{5}{x^3}$

2) $\frac{2m^3}{n^5}$

3) $\frac{1}{a^3b^2}$

4) $\frac{2x}{a-b}$

5) $\frac{a}{b}$

6) $\frac{p^5}{q^4}$

7) $\frac{c}{a^3b^4}$

8) $\frac{(x-y)^2}{25(x+y)^4}$

1.96. Есептендер.

1) $7^3 \cdot 7^{-2}$

2) $2 : 2^{-2}$

3) $(3^{-1})^2$

4) $(5^{-2})^{-1}$

5) $8^{-2} \cdot 4^3$

6) $10^0 : 10^{-3}$

7) $10^8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-4}$

8) $3^{-6} \cdot (3^{-2})^{-4}$

1.97. Дәрежені көбейтінді түріне келтіріңдер.

1) $(x^{-1} \cdot y^{-2})^{-2}$

2) $\left(\frac{1}{2}a^{-3}b^3\right)^{-2}$

3) $(0,25m^{-2}n^2)^{-3}$

4) $(a^3 \cdot b^{-1})^2$

5) $(-3p^3 \cdot q^{-1})^2$

6) $\left(\frac{1}{3}x^{-3}y^2\right)^3$

1.98. Өрнектерді негізі 2 болатын дәреже түрінде жазыңдар.

1) $8 \cdot 2^{-4}$

2) $(2^{-1})^5 : 16^2$

3) $4^{-2} : 2^{-6}$

4) $16^3 : (4^{-2})^{-3}$

1.99. Сандарды негізі 2 болатын дәрежемен алмастырыңдар.

16

8

4

2

1

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}$

В

1.100. Өрнектердің мәнін табыңдар.

1) $18 \cdot (-9)^{-1}$

2) $0,5^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

3) $10^2 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^{-1}$

4) $(0,97)^0 + (0,1)^{-3}$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

6) $2^{-3} - 3^{-2}$

1.101. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) теңдігін дәлелдеңдер.

1.102. Нөлмен салыстырыңдар.

$$1) (-0,001)^6 \quad 2) \left(-\frac{1}{25}\right)^{-3} \quad 3) (-5)^4 \quad 4) (-2)^{-3}$$

1.103. Салыстырыңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) 2^{-5} \text{ және } 2^{-4} & 2) 7^{-5} \text{ және } 7^{-3} \\ 3) (-3)^{-3} \text{ және } 3^{-3} & 4) (0,2)^{-3} \text{ және } (0,5)^{-3} \\ 5) (0,3)^{-3} \text{ және } (0,3)^{-4} & 6) 6^{-2} \text{ және } (-6)^{-2} \end{array}$$

1.104. Негізі 3 болатын дәреже түріне келтіріңдер.

$$\begin{array}{ll} 1) 3^n \cdot 3^{n+1} \cdot 3^{1-n}, \quad n \in Z & 2) (3^m)^2 \cdot (3^3)^m, \quad m \in Z \\ 3) 81^m : 3^{4m-2}, \quad m \in Z & 4) (-3)^{4n} : 27^n, \quad n \in Z \end{array}$$

1.105. n -нің қандай бүтін мәндерінде теңдік кез келген $x \neq 0$ үшін орындалады?

$$\begin{array}{ll} 1) x^n \cdot x^6 = x^4 & 2) x^3 : x^n = x^{-2} \\ 3) (x^{-3})^n \cdot x^3 = x^6 & 4) (x^{-n})^{-4} = x^{-4} \end{array}$$

1.106. a^{20} өрнегін (мұнда $a \neq 0$) негізі: 1) a^4 ; 2) a^{-5} ; 3) $\frac{1}{a^2}$; 4) $\frac{1}{a^{-4}}$ болатын дәреже түрінде жазыңдар.

1.107. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (0,25a^{-4}y^{-3})^2 \cdot \left(\frac{a^{-3}}{4y^2}\right)^{-3} & 2) \left(\frac{x^{-3}y^4}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{x^{-2}y^3}\right)^{-3} \\ 3) \left(\frac{m^{-4}}{10n^5k^2}\right)^{-2} : (5m^2n^3k)^3 & 4) \left(\frac{9c^5}{a^3b^{-2}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^2b^{-3}}{6c^4}\right)^3 \end{array}$$

С

1.108. Өрнектерді 10-ның дәрежесі түріне келтіріңдер.

$$1) 100^n \quad 2) 0,01 \cdot 100^{n+3} \quad 3) 0,01^n : 10^{2-2n}$$

1.109. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) 5x^{-1} - 6 = 0 \quad 2) 3 + 10x^{-1} = 0 \quad 3) (5 - x^{-1})^{-1} = 2^{-2}$$

1.110. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{\left(\frac{1}{25}\right)^{-n}}{5^{2n-1}} \quad 2) \frac{12^n}{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}} \quad 3) \frac{45^{n+1}}{3^{2n+1} \cdot 5^n} \quad 4) \frac{60^n}{2^{2n} \cdot 3^{n-1} \cdot 5^{n+1}}$$

1.111. Теңдіктерді дәлелдеңдер (мұндағы n – бүтін сан).

$$1) 3 \cdot 2^n + 2^n = 2^{n+2} \quad 2) 2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$$

$$3) 2^{1-n} - 2^{-n} = 2^{-n} \quad 4) 2^{-n} + 2^{-n+1} = 3 \cdot 2^{-n}$$

1.112. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{(3^n + 3^{n-1})^2}{9^{n-1}} \quad 2) \frac{(5^n - 5^{n-1})^3}{125^{n-1}} \quad 3) \frac{4^{n-2}}{(2^{n-1} - 2^{n-2})^2}$$

Қайталауға арналған жаттығулар

- 1.113. Ұзындығы 9 км болатын тау жолымен жоғары көтеріліп және қайта төмен түсу үшін туристерге 5 сағат қажет болды. Егер төмен түсуге кеткен уақыт жоғары шығуға жұмсалған уақыттан 1,5 есе кем болса, онда туристер тауға қандай жылдамдықпен көтерілген?
- 1.114. Аулада 20 тауық пен бірнеше қоян жүр. Олардың барлығының аяқ санын қосқанда, 52 шығады. Аулада неше тауық және неше қоян жүр?
- 1.115. Сызықтық теңдеудің графигі абсцисса өсіне параллель және $M(2; -3)$ нүктесі арқылы өтеді. Осы сызықтық теңдеуді жазыңдар.

1.3. Бүтін көрсеткішті дәрежені қолдану

1.3.1. Құрамында дәрежесі бар сандар тізбегі

Келесі сандар жиынын қарастырайық:

$$2; 4; 8; 16; \dots \quad (1)$$

Қандай да бір заңдылықпен шексіз жалғасып жазылатын сандар жиынын **сан тізбегі** деп атайды.

(1) сан тізбегінің жазылу заңдылығын анықтайық. Оны келесі кестеден оңай көруге болады.

Тізбек мүшелерінің реті	1-мүшесі	2-мүшесі	3-мүшесі	4-мүшесі	т.с.с.	n -ші мүшесі немесе жалпы мүшесі
Берілген тізбек	$a_1=2$	$a_2=4$	$a_3=8$	$a_4=16$	...	a^n
2-нің дәрежесі түрінде жазылуы	2^1	2^2	2^3	2^4	...	2^n

Сонымен, (1) сан тізбегінің әрбір мүшесін негізі 2-ге тең дәреже түрінде жазуға болады. Тізбектің әрбір мүшесінің дәреже көрсеткіші келесі мүшесінің дәреже көрсеткішінен 1-ге кем және дәреже көрсеткіші осы мүшенің реттік нөмірімен бірдей. Мұнда $a_n = 2^n$ – **тізбектің жалпы мүшесінің (немесе n -ші мүшесінің) формуласы** деп аталады.

Кейде тізбектер a_n жалпы мүшесінің формуласымен беріледі. Мұнда n -нің орнына 1, 2, 3, және т.с.с. мәндерін қойып, тізбектің сәйкес 1-ші, 2-ші, 3-ші және т.с.с. мүшелерін анықтаймыз.

1-мысал. 1) $a_n = \frac{n}{5^n}$; 2) $a_n = (-1)^{n-1}$ жалпы мүшесі формуласымен берілген тізбектің алғашқы 4 мүшесін жазу керек.

$$\text{Шешуі. 1) } a_1 = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}; \quad a_2 = \frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}; \quad a_3 = \frac{3}{5^3} = \frac{3}{125}; \quad a_4 = \frac{4}{5^4} = \frac{4}{625}; \dots$$

$$2) a_1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1; a_2 = (-1)^{2-1} = (-1)^1 = -1; a_3 = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1; a_4 = (-1)^{4-1} = -1 \dots$$

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{5}; \frac{2}{25}; \frac{3}{125}; \frac{4}{625}; \quad 2) 1; -1; 1; -1.$$

2-мысал. 1) 1; 3; 9; 27; ... ; 2) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{16}; \dots$ тізбектерінің заңдылығын анықтайық.

Шешуі. 1) $1=3^0$; $3=3^1$; $9=3^2$; $27=3^3$ болғандықтан, тізбек негізі 3-ке тең дәреже түрінде жазылады және дәреже көрсеткіші тізбек мүшесі нөмірінен 1-ге кем.

$$2) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1 \cdot 2^{-1}; \frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = 3 \cdot 2^{-2}; \frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = 5 \cdot 2^{-3}; \frac{7}{16} = \frac{7}{2^4} = 7 \cdot 2^{-4},$$

мұнда бөлшектің бөлімінде негізі 2-ге тең дәреже орналасқан, ал алымында өсу тәртібімен тақ сандар жазылған.

Дәрежені натурал сандарды разрядтық қосылғыштарға жіктеп жазуда да қолданады. Мысалы, $6385 = 6 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 = 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$.

1.3.2. Санның стандарт түрі. Ғылым мен техникада өте үлкен және өте кіші сандарды жиі қолданады. Мысалы, Күннің диаметрі шамамен 1 392 000 000 м, ал су молекуласының диаметрі – 0,00000003 см. Осындай сандарды ықшамды түрде жазу үшін санның стандарт түрі қолданылады.

x санының стандарт түрі былай жазылады:

$$a \cdot 10^n, (1 \leq a < 10), \quad (1)$$

n – бүтін сан (x санының реті), ал a – оның мәнді бөлігі.

Мысалы, Күннің диаметрі $1,392 \cdot 10^9$ м және оның реті 9-ға тең.

Стандарт түрде жазылған санда үтірге дейін тек бір цифр жазылады, ал өзге цифрлар үтірдің оң жағында жазылуы қажет.

1-мысал. Жер мен Күннің арақашықтығы $150 \cdot 10^6$ км. Бұл санның стандарт түрі емес. Оның стандарт түрі былай жазылады: $1,5 \cdot 10^8$ км.

Есептер шығару барысында санды үтірден соң 1-ші, 2-ші, 3-ші және т.с.с. мәнді цифрға дейін дөңгелектеп алады. Мысалы, Күннің диаметрін 1-ші, 2-ші, 3-ші мәнді цифрына дейін дөңгелектеп жазайық:

$$1) 1,392 \cdot 10^9 \text{ м} \approx 1 \cdot 10^9 \text{ м}; \quad 2) 1,392 \cdot 10^9 \text{ м} \approx 1,4 \cdot 10^9 \text{ м};$$

$$3) 1,392 \cdot 10^9 \text{ м} \approx 1,39 \cdot 10^9 \text{ м және т.с.с.}$$

Стандарт түрде берілген сандарды көбейтуді және бөлуді қарастырайық.

2-мысал.

$$1) (3,2 \cdot 10^3) \cdot (2,7 \cdot 10^5) = (3,2 \cdot 2,7) \cdot 10^{3+5} = 8,64 \cdot 10^8$$

$$2) (9 \cdot 10^2) \cdot (1,5 \cdot 10^{-5}) = (9 \cdot 1,5) \cdot 10^{2-5} = 13,5 \cdot 10^{-3} = 1,35 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1,35 \cdot 10^{-2}$$

$$3) (2,7 \cdot 10^4) : (1,5 \cdot 10^6) = (2,7 : 1,5) \cdot 10^{4-6} = 1,8 \cdot 10^{-2}$$

$$4) (1,3 \cdot 10^5) : (6,5 \cdot 10^{-3}) = (1,3 : 6,5) \cdot 10^{5+3} = 0,2 \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^7$$



1. Сан тізбегі ұғымын қалай түсінесіңдер? Мысал келтіріңдер.
2. Құрамында дәрежесі бар сан тізбектерінің дәреже көрсеткіштері қалай орналасуы мүмкін? Барлық мүмкін жағдайға мысал келтіріңдер.
3. Санның стандарт түрі қалай жазылады? Мысал келтіріңдер.
4. Стандарт түрде жазылған санның мәнді бөлігі деп нені айтады? Мәнді бөлік қандай шартты қанағаттандыруы қажет?
5. Мәнді бөлік 1-ден кіші не 10-нан үлкен болуы мүмкін бе?
6. Санның реті деп нені айтады? Өте үлкен және өте кіші сандар ретінің таңбасы қандай болады? Мысал келтіріңдер.



Шахмат туралы аңыз. Шахмат ойынын ойлап тапқан – Сета есімді өнертапқыш. Ежелгі үнді патшасы Сетаны марапаттау мақсатында оның нені қалайтынын сұрайды. Сонда Сета шахмат тақтасындағы 64 шаршының

біріншісіне – 1 дән, екіншісіне – 2 дән, үшіншісіне – 4 дән, төртіншісіне – 8 дән және т.с.с., яғни әрбір шаршыға алдыңғысынан екі есе көп дән беруді өтінеді. Алғашында патша Сетаның бұл «тым болмашы» тілегіне таңғалып, оны орындауға бұйрық бергенімен, артынша бұл тілекті орындауға өз қазынасының қауқарсыз екеніне көзі жетеді. Шынында да, шахмат тақтасының әрбір шаршысына, сәйкесінше, $1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^{63}$ дана дән сұраған. Ал бұл дәндерді компьютер көмегімен қосқанда 18 446 744 073 709 551 615 дана дән алынған.



1. Сета сұраған дән санын стандарт түрде жазыңдар. Мұнда үтірден соң екі мәнді цифрға дейін дөңгелектеп алыңдар.
2. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$ қосындысындағы алғашқы сегіз қосылғыштың қосындысын тауып, жауабын бір жолға өсу ретімен жазыңдар.
3. Бір пұт астықта шамамен $4000 = 4 \cdot 10^3$ дана дән бар, ал Қазақстанда жыл сайын шамамен $1\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^9$ пұт астық жиналады деп алып, Сета сұраған дәнді Қазақстан неше жыл жинайтынын бағалаңдар.

Жаттығулар

А

1.116. Сандар тізбегінің келесі екі мүшесін жазыңдар.

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1) 3; 9; 27; ... | 2) 4; 16; 64; ... |
| 3) 1; 2; 4; ... | 4) 1; 5; 25; ... |

1.117. 0,25; 0,5; 1; 2; 4 сандарын негізі 2-ге тең дәреже түрінде жазыңдар.

1.118. $\frac{1}{27}; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1$ сандарын негізі 3-ке тең дәреже түрінде жазыңдар.

1.119. 0,2; 1; 5; 25 сандарын негізі 5-ке тең дәреже түрінде жазыңдар.

1.120. Сандарды стандарт түрде жазып, ретін көрсетіндер.

- | | | | |
|-------------------|-----------|------------------------|--------------------------------|
| 1) 5 000 000 | 2) 0,05 | 3) 0,00064 | 4) $\frac{1}{7} \cdot 10^{-5}$ |
| 5) 27 760 000 000 | 6) 0,0019 | 7) $\frac{22}{210000}$ | 8) $\frac{1}{800000}$ |

1.121. Сандарды стандарт түрде жазыңдар.

- 1) Жерден Күнге дейінгі қашықтық 149 500 000 км.
- 2) Жер бетінің ауданы 510 083 000 км².

- 3) Сутегі атомының массасы 0,000 000 000 000 000 000 000 00172 г.
 4) Адам денесіндегі жасушалар саны шамамен 100 000 000 000 000 дана.

1.122. Сандарды салыстырыңдар.

- 1) $3,4 \cdot 10^{11}$ және $7,5 \cdot 10^9$ 3) $7,27 \cdot 10^{-5}$ және $5,1 \cdot 10^{-4}$
 2) $3,4 \cdot 10^{-11}$ және $7,5 \cdot 10^{-9}$ 4) $9,2 \cdot 10^{-7}$ және $3,2 \cdot 10^4$

1.123. Санды стандарт түрде жазып, оның ретін көрсетіңдер.

- 1) Қазақстан территориясының ауданы 2724,9 мың кв.км.
 2) 2025 жылғы 1 мамырдағы дерек бойынша Қазақстан халқы саны 20 316 155 адам болған.
 3) 2025 жылдаң 1 қаңтарындағы дерек бойынша Жер шарын мекендейтін халық саны 8,156 млрд болған.
 4) Оптикалық микроскоп диаметрі 0,0025 см болатын нысанды ажырата алады.

1.124. 1) 1.117-есепте; 2) 1.118-есепте; 3) 1.119-есепте берілген сандарды тізбектің қатар орналасқан мүшелері деп алып, оның келесі мүшесін жазыңдар.

1.125. Амалдарды орындаңдар.

- 1) $(1 \cdot 10^5) \cdot (2,7 \cdot 10^4)$ 5) $(5,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3,4 \cdot 10^{-3})$
 2) $(8,2 \cdot 10^{12}) : (2,5 \cdot 10^7)$ 6) $(4,5 \cdot 10^{-5}) : (7 \cdot 10^{-8})$
 3) $(4,27 \cdot 10^7) \cdot (40 \cdot 10^4)$ 7) $(4,27 \cdot 10^7) : (4 \cdot 10^4)$
 4) $(2,8 \cdot 10^{-7}) \cdot (4,6 \cdot 10^{-8})$ 8) $(560 \cdot 10^7) : (752 \cdot 10^6)$

В

1.126. Массаны грамм арқылы өрнектеп, оны стандарт түрде жазыңдар.

- 1) 969,5 кг 2) 43,2 т 3) 760 т

1.127. 1) 64 м^2 -ді мм^2 арқылы; 2) 16 мм^2 -ді м^2 арқылы өрнектеп, жауабын стандарт түрде жазыңдар.

1.128. Сандар тізбегінің келесі екі мүшесін жазыңдар.

- 1) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{9}{27}, \dots$ 2) 1, 0,1, 0,01, ...
 3) 6, 12, 24, 48, ... 4) 1, -2, 4, -8, ...

1.129. Тізбектің жалпы мүшесінің формуласы бойынша оның алғашқы үш мүшесін тізіп жазыңдар.

- 1) $a_n = 5^n$ 2) $b_n = n^2$ 3) $c_n = \frac{1}{2^n}$ 4) $d_n = 4^{-n}$

1) $a_n = \frac{n}{3^n}$ 2) $a_n = n^2 \cdot 2^{-n}$ 3) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 4) $a_n = (-1)^{n-1}$

Сан	Санның стандарт түрі	Санның мәнді бөлігі	Санның реті
1 200 000			
	$3,21 \cdot 10^4$		
		2,08	7
	$6,77 \cdot 10^{-5}$		-5
0,0001783			
0,00002956			

1) 25 800 млн тг 2) 450 мың км
3) 125 700 мың кг 4) 57 млн тұрғын

1) $4,7 \cdot 10^{-3}$ км-ді метрмен
2) $8,8 \cdot 10^5$ тоннаны килограммен
3) $6,82 \cdot 10^{-2}$ кг-ды тоннамен
4) $7,19 \cdot 10^7$ см-ді метрмен

1.138. Кестеде 2024 жылғы Мемлекеттік Статистика комитетінің мәліметі бойынша Қазақстанның 17 облысы аумағының ауданы мен тұрғындар саны берілген.

№	Облыстар	Жерінің ауданы (мың км ²)	Тұрғындар саны
1	Абай облысы	185,5	609 542
2	Ақмола облысы	146	788 353
3	Ақтөбе облысы	300,6	932045
4	Алматы облысы	105,3	1514 039
5	Атырау облысы	118,6	696 792
6	Шығыс Қазақстан облысы	97,8	689 883
7	Жамбыл облысы	144,2	1 219 889
8	Жетісу облысы	118,6	698619
9	Батыс Қазақстан облысы	151,2	689 883
10	Қарағанды облысы	239	1 135 259
11	Қызылорда облысы	226	836 527
12	Қостанай облысы	196	831 445
13	Маңғыстау облысы	165,6	773 752
14	Павлодар облысы	124,8	755 014
15	Солтүстік Қазақстан облысы	9	532 911
16	Түркістан облысы	116	2 127 382
17	Ұлытау облысы	189	221 461

Келтірілген мәліметтерді: 1) стандарт түрде жазыңдар; 2) жерінің ауданы бойынша ең үлкен және ең кіші облысты анықтаңдар; 3) жерінің ауданын квадрат метр (м²) есебімен стандарт түрде жазыңдар; 4) тұрғындары ең тығыз және ең сирек орналасқан облыстарды анықтаңдар (адам/км² есебімен).

1.139. Тізбектің жалпы мүшесін және келесі екі мүшесін жазыңдар.

1) $1; -2; 4; -8; \dots$ 2) $1; 1; \frac{9}{5}; \frac{7}{27}; \dots$

3) $0; \frac{2}{5}; \frac{4}{25}; \frac{6}{125}; \dots$ 4) $2; 0; 2; 0; \dots$

1.140. Бір ұяда 60–80 мыңдай ара болады. Олардың шамамен 50000-ы шырын таситын жұмысшы аралар. Бір жұмысшы ара бір ұшқанда 200-дей гүлге қонып, 40 мг шырын жинайды. Ол күніне орта есеппен 4 рет ұшып шығады. Сонымен қатар әрбір жұмысшы ара 1 секундта орта есеппен қанатын 400 рет қағады және олар шамамен небәрі 1 ай өмір сүреді.

- 1) Бір жұмысшы ара орта есеппен өз ғұмырында неше килограмм шырын жинайды?
 - 2) Бір ұядағы аралар тәулігіне неше грамм (кг) шырын жинайды?
 - 3) Бір жұмысшы ара тәулігіне (күндізгі 10 сағат ішінде) қанатын неше рет қағады?
 - 4) 1 кг шырын жинау үшін жұмысшы аралар шамамен неше гүлге қонуы қажет?
- Анықтаған нәтижелерді стандарт түрде жазыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

- 1.141. Теңдеулерді шешіңдер: 1) $\frac{y-5}{9} + \frac{5y-2}{6} = 1$; 2) $3 + \frac{x+2}{4} = \frac{5x}{11}$.
- 1.142. Қандай шарт орындалғанда $y = 2x + b$ түзуі мына нүктелер арқылы өтеді: 1) $A(0; 2)$; 2) $B(-2; 0)$?
- 1.143. n мен m -нің үш еселенген көбейтіндісінен олардың төрт еселенген қосындысын азайтып, нәтижесін $m = 2,3$ және $n = -10$ деп алып, есептеңдер.

1.3.3. Стандарт түрде берілген сандарды қосу және азайту

Жер мен Күннің арақашықтығы 149500000 км, оның стандарт түрі $1,5 \cdot 10^8$ км. Ал Алматы мен Тараз қалаларының арасы 500 км ($5 \cdot 10^2$ км). Бұл екі қашықтықты бір-біріне қосқаннан немесе азайтқаннан маңызды дерек алынбайды. Өйткені $1,5 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^2 \approx 1,5 \cdot 10^8$ және $1,5 \cdot 10^8 - 5 \cdot 10^2 \approx 1,5 \cdot 10^8$. Мұнда $5 \cdot 10^2$ саны $1,5 \cdot 10^8$ санының мәнді бөлігіне әсер ете алмайды.

Бір-бірінің мәнді бөліктеріне әсері болатын сандарды ғана қосуға немесе азайтуға болады.

1-мысал.

- 1) $3,21 \cdot 10^7 + 8,7 \cdot 10^7 = (3,21 + 8,7) \cdot 10^7 = 11,91 \cdot 10^7 = 1,191 \cdot 10^8$
- 2) $3,21 \cdot 10^8 - 8,7 \cdot 10^7 = 32,1 \cdot 10^7 - 8,7 \cdot 10^7 = (32,1 - 8,7) \cdot 10^7 = 23,4 \cdot 10^7 = 2,34 \cdot 10^8$
- 3) $2,3 \cdot 10^{-5} + 9,25 \cdot 10^{-5} = (2,3 + 9,25) \cdot 10^{-5} = 11,55 \cdot 10^{-5} = 1,155 \cdot 10^{-4}$

1.3.4. Абсолюттік және салыстырмалы қателіктер

Өте үлкен және өте кіші сандарды стандарт түрде жазғанда, үтірден соң бірнеше мәнді цифрды ғана қалдырып, қалғанын дөңгелектеп алдық.

Мысалы, 02.04.2025 жылғы дерек бойынша Ақмола облысының ауданы 146219 км^2 болған. Оны стандарт түрде жазғанда $1,46 \cdot 10^5 \text{ км}^2$

деп алдық. Бұл мәліметтің дәл мәні $a = 146219 \text{ км}^2$, ал стандарт түрде жазылған жуық мәні $\tilde{a} = 1,46 \cdot 10^5 \text{ км}^2$. Өлшеу жұмыстары кезінде қателік орын алуы мүмкін және оның абсолют шамасы мынаған тең:

$$|a - \tilde{a}| = |146219 - 1,46 \cdot 10^5| = 219 \text{ км}^2.$$

Бұл сан өлшеу нәтижесінде шыққан сан мен нақты санның айырмашылығын білдіреді және оны жуық мәннің *абсолюттік қателігі* деп атайды.

Анықтама. Жуық мәннің абсолюттік қателігі деп дәл мән мен жуық мән айырмасының абсолют шамасын (модулін) айтады.

Қарастырған мысалда 219 км^2 – өте үлкен сан болып көрінеді. Бірақ оның жуық мәнмен салыстырғандағы үлесі кіші сан болады. Шынында да, оны тексеру үшін абсолюттік қателікті жуық мән модуліне бөлеміз:

$$\frac{|a - \tilde{a}|}{|\tilde{a}|} = \frac{219}{1,46 \cdot 10^5} = (219 : 1,46) \cdot 10^{-5} = 150 \cdot 10^{-5} = 0,0015.$$

0,0015 саны – жуық мәннің ($\tilde{a} = 1,46 \cdot 10^5 \text{ км}^2$) салыстырмалы қателігі.

Бұл сан есептеу нәтижесінде шыққан санмен салыстырғанда қателіктің қаншалықты үлкен екенін білдіреді.

Егер шыққан нәтижені 100-ге көбейтсек, онда абсолюттік қателіктің жуық мәнге шаққандағы проценттік үлесін аламыз: $0,0015 \cdot 100 = 0,15\%$, яғни біздің қателігіміз жуық мәннің небәрі $0,15\%$ -ін құрайды.

Анықтама. Абсолюттік қателіктің жуық мән модуліне қатынасы жуық мәннің салыстырмалы қателігі деп аталады.

2-мысал. Жер шарының диаметрі $12\,756\,000 \text{ м}$. Бұл санды үтірден соң 1; 2 және 3 мәнді цифр қалдырып, жуық мәннің абсолюттік және салыстырмалы қателіктерін анықтайық.



Шешуі. 1) $a = 12\,756\,000 \text{ м}$ – дәл мәні;

$\tilde{a} = 1,3 \cdot 10^7 \text{ м}$ – жуық мәні;

$|a - \tilde{a}| = 244\,000 \text{ м} = 2,44 \cdot 10^5$ – абсолюттік қателік;

$\frac{|a - \tilde{a}|}{|\tilde{a}|} = \frac{2,44 \cdot 10^5}{1,3 \cdot 10^7} \approx 1,88 \cdot 10^{-2} = 0,0188$ – салыстырмалы қателік, яғни са-

лыстырмалы қателік жуық мәннің $0,0188 \cdot 100\% = 1,88\%$ -ін құрайды.

$$2) a = 12\,756\,000 \text{ м}; \quad \tilde{a} = 1,28 \cdot 10^7 \text{ м},$$

$$|a - \tilde{a}| = 44\,000 \text{ м} = 4,4 \cdot 10^4 \text{ м} - \text{абсолюттік қателік},$$

$$\frac{|a - \tilde{a}|}{|\tilde{a}|} = \frac{4,4 \cdot 10^4}{1,28 \cdot 10^7} = 3,4375 \cdot 10^{-3} \approx 0,0034 \text{ немесе } 0,34\% - \text{салыстырмалы}$$

қателік.

$$3) a = 12\,756\,000 \text{ м}; \quad \tilde{a} = 1,276 \cdot 10^7 \text{ м},$$

$$|a - \tilde{a}| = 4000 \text{ м} = 4 \cdot 10^3 \text{ м} - \text{абсолюттік қателік},$$

$$\frac{|a - \tilde{a}|}{|\tilde{a}|} = \frac{4 \cdot 10^3}{1,276 \cdot 10^7} \approx 3,13 \cdot 10^{-4} \text{ немесе } 0,0313\% - \text{салыстырмалы қателік}.$$

Берілген санды стандарт түрде жазғанда үтірден кейінгі мәнді цифрлар саны қажетті дәлдікке дейін таңдап алынады. Салыстырмалы қателік неғұрлым аз болса, жуықтау дәлдігі соғұрлым арта түседі.

Жалпы абсолюттік және салыстырмалы қателіктер өлшеу немесе есептеу нәтижелерінің дәлдігін бағалауға көмектеседі. Мұны, әсіресе ғылыми еңбектерде кеңінен қолданады.



1. Стандарт түрде жазылған кез келген санды қосуға (азайтуға) бола ма (практикалық маңызы бола ма)? Мысал келтіріңдер.
2. Стандарт түрде жазылған сандарды қосу (азайту) үшін олар қандай шартты қанағаттандыруы қажет?
3. Абсолюттік қателік деп нені айтады?
4. Салыстырмалы қателік деп нені айтады?
5. Өлшеу нәтижесінің сапасын қалай арттыруға болады?
6. Санды стандарт түрде жазғанда оның мәнді бөлігін қандай принципке сүйеніп алған орынды? Мысал келтіріңдер.



Өзің отырған парта бетінің ені мен ұзындығын 1 мм-ге дейінгі дәлдікпен өлшеп, оның ауданын мм² есебімен анықтаңдар. Алынған нәтижені үтірден соң 1; 2 және 3 мәнді цифр қалатындай етіп, стандарт түрде жазыңдар. Өрбір жағдайда стандарт түрде жазылған санның абсолюттік және салыстырмалы қателіктерін анықтаңдар.

Жаттығулар

А

1.144. Амалдарды орындаңдар.

$$1) 1,22 \cdot 10^6 + 3,79 \cdot 10^6$$

$$2) 4,2 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$3) 1,27 \cdot 10^5 + 8,23 \cdot 10^4$$

$$4) 1,27 \cdot 10^{-5} - 8,23 \cdot 10^{-6}$$

$$5) 8,5 \cdot 10^{12} + 3,91 \cdot 10^{13} + 2,5 \cdot 10^{12}$$

$$6) 1,28 \cdot 10^{-7} + 4,5 \cdot 10^{-7} - 9,7 \cdot 10^{-8}$$

- 1.145. 4,27; 17,032; 9,753 сандарын 0,1-ге дейін дөңгелектеп, оның абсолюттік қателігін анықтаңдар.
- 1.146. Сандарды бірлікке дейін дөңгелектеп, абсолюттік және салыстырмалы қателігін табыңдар.
1) 5,4 2) 7,9 3) 1,89 4) 8,5 5) 3,71 6) 11,27
- 1.147. 1) 8,79-ды бірлікке дейінгі; 2) 132-ні ондыққа дейінгі; 3) 0,777-ні оннан бірге дейінгі; 4) 1,2839-ды жүзден бірге дейінгі дәлдікпен дөңгелектеп, оның абсолюттік қателігін табыңдар.
- 1.148. Сүйір бұрыш салып, оны транспортірді пайдаланып өлшеңдер. Өлшеу нәтижесінің дәлдігі қандай?
- 1.149. 3,275 санын 0,1-ге дейін дөңгелектеңдер. Салыстырмалы қателігін табыңдар.
- 1.150. Алгебраға арналған дәптерлеріңнің қалыңдығын сызғышпен өлшеп, салыстырмалы қателігін бағалаңдар.
- 1.151. $\frac{1}{3}$ санын ондық бөлшекке айналдырып, оны 0,1-ге, 0,01-ге және 0,001-ге дейінгі дәлдікпен жуықтаңдар. Өрбір жуықтаудың абсолюттік қателігін табыңдар.
- 1.152. 1°C-қа дейінгі дәлдікпен өлшейтін термометр 21°C-ты көрсетіп тұр. Ауа температурасы қандай салыстырмалы қателік бойынша анықталған?
- 1.153. Жер бетінің ауданы 510,2 млн км² (0,1 млн км²-ге дейінгі дәлдікпен алғанда). Салыстырмалы қателікті бағалаңдар.
- 1.154. Амалдарды орындандар.
1) $4,125 \cdot 10^7 + 9,29 \cdot 10^7$ 2) $8,927 \cdot 10^{-5} + 5,32 \cdot 10^{-5}$
Қосындыны үтірден соң 1 және 2 мәнді цифр қалатындай етіп, стандарт түрде жазыңдар. Жуық мәннің абсолюттік және салыстырмалы қателігін табыңдар.

B

- 1.155. Бөлшектерді периодты ондық бөлшектерге айналдырыңдар және оны 0,01-дейінгі дәлдікпен жуықтаңдар. Жуық мәннің абсолюттік қателігін табыңдар.

1) $3\frac{2}{3}$ 2) $2\frac{5}{6}$ 3) $4\frac{10}{11}$ 4) $3\frac{1}{12}$

- 1.156.** Санды 0,01-ге дейінгі дәлдікпен жуықтап, оның салыстырмалы қателігін анықтаңдар.
 1) 3,(6) 2) 2,7(2) 3) 2,(72) 4) 2,89(3)
- 1.157.** 1.144-есеп нәтижелерін үтірден соң 1, 2 және 3 мәнді цифр қалатындай етіп, стандарт түрде жазыңдар. Оның салыстырмалы қателігін табыңдар.
- 1.158.** 2,66 және 2,67 сандарының әрқайсысы $2\frac{2}{3}$ санының 0,01-ге дейінгі дәлдікпен алынған жуықтаулары болатынын дәлелдеңдер. Бұл жуықтаулардың қайсысы 0,005-ке дейінгі дәлдікпен алынған жуықтауы болады?
- 1.159** $\frac{2}{11}$ санының қай жуықтауы дәлірек: 0,18 ба әлде 0,19?
- 1.160.** $\pi = 3,14159$ санының қай жуықтауы дәлірек: 3,141; 3,142; $3\frac{1}{7}$; $3\frac{10}{71}$?
- 1.161.** 2,5 саны 2,4673-тің 0,1-ге дейінгі дәлдікпен алынған жуықтауы болатынын көрсетіңдер.
- 1.162.** Адам шашының қалыңдығын d деп алып, $d \approx 0,15$ мм 0,01 мм-ге дейінгі дәлдікпен, ал Жерден Айға дейінгі қашықтықты l деп алып, $l \approx 384400$ км 500 км-ге дейінгі дәлдікпен есептелген. Осы өлшеу нәтижелерінің сапасын процент (%) есебімен анықтаңдар.
- 1.163.** 5 грамға дейінгі дәлдікпен өлшейтін таразыда 2 кг қант пен 5 кг ұн өлшенді. Салыстырмалы қателік бойынша өлшеу сапасын анықтаңдар.
- 1.164.** 1) 48,8; 2) 2738 сандарын ондыққа дейін дөңгелектеп, оның салыстырмалы қателігін процент (%) есебімен табыңдар.
- 1.165.** $\frac{2}{3} + \frac{7}{9}$ қосындысының әрбір қосылғышын 0,1-ге дейінгі жуықтауларымен алмастырып, қосу амалын орындаңдар. Қосылғыштар мен қосынды мәнінің жуық мәндерінің абсолюттік қателіктерін табыңдар.

С

- 1.166.** a және b сандарының жарым қосындысы осы сандардың әрқайсысын олардың жарым айырмасының модуліне дейінгі дәлдікпен алынған жуықтаулары болатынын көрсетіңдер.
- 1.167.** Жер шары Күнді 365,24 тәулікте толық бір айналып өтеді. Бұл мәнді сағатқа аударыңдар. Алынған санды салыстырмалы қателігі 0,1%-тен артық болмайтындай етіп, стандарт түрде жазыңдар.
- 1.168.** Күн жүйесіндегі ең үлкен ғаламшар – Юпитердің орташа диаметрі 142 800 км. Бұл санды метрмен өрнектеңдер және алынған мәліметті салыстырмалы қателігі: 1) 1%-тен; 2) 0,1%-тен кем болатындай етіп, стандарт түрде жазыңдар.
- 1.169.** Өлшеу құралында салыстырмалы қателік шегарасы 0,1%-ке тең деп жазылған. Осы құралмен бір шаманы өлшеу барысында 487 саны алынды. Өлшеу жұмысы қандай дәлдікпен жүргізілді?
- 1.170.** Егер $0 < \alpha < 1$ болса, онда $(1 + \alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha$ жуықтау формуласы өте жиі қолданылады. Осы формуламен анықталатын жуық мәндердің абсолюттік қателігі қандай? Осы формула бойынша: 1) $(1 + 0,001)^2$; 2) $1,05^2$; 3) $1,002^2$; 4) $0,999^2$ сандарының жуық мәндерін табыңдар. Калькуляторды пайдаланып, жуық мәнің абсолюттік және салыстырмалы қателігін табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

- 1.171.** Координаталар бас нүктесіне қатысты: 1) $A(-3; 4)$; 2) $B(5; -2)$, нүктесіне симметриялы нүкте координаталарын табыңдар.
- 1.172.** Өрнектердің мәнін табыңдар.
 1) $1,2x + 4(1,7x - 2y)$, мұндағы $x - y = 2$
 2) $1,6(5m + 3k) - 5,2m$, мұндағы $0,7m + 1,2k = 3$
- 1.173.** Екі таңбалы санның цифрлары мәндерінің қосындысы 10-ға тең. Егер осы санның цифрларының орындарын ауыстырып, шыққан санның бірлік цифрын 1-ге арттырсақ, онда берілген саннан екі есе үлкен сан шығады. Осы екі таңбалы санды табыңдар.

**«Натурал және бүтін көрсеткішті дәреже»
бөлімі бойынша тест тапсырмалары**

- Өрнекті ықшамдаңдар: $\left(\frac{3}{7}a^2b\right)^2 \cdot \frac{7}{3}b^2a$.
 A) a^5b^4 B) $\frac{3}{7}a^5b^4$ C) $\frac{7}{3}a^5b^3$ D) $\frac{3}{7}a^4b^4$
- Есептеңдер: $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 0,027$.
 A) -1 B) 1 C) $-\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{9}$
- Дәреженің қасиеттерін пайдаланып, өрнектің мәнін табыңдар: $\frac{18^6}{32 \cdot 27^4}$.
 A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 2 D) 3
- Өрнектің мәні қандай цифрмен аяқталатынын анықтаңдар: $3^3 + 4^3 + 5^3$.
 A) 4 B) 6 C) 8 D) 7
- Температурасы 0°C , қысымы сынап бағаны бойынша 760 мм болатын 1 см^3 газдағы молекулалар саны $27\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$ -ға тең. Осы санды стандарт түрде жазыңдар.
 A) $2,7 \cdot 10^{19}$ B) $27 \cdot 10^{18}$ C) $0,27 \cdot 10^{20}$ D) $27 \cdot 10^{19}$
- n – натурал сан болса, $3^{n+3} : 3^{n+1}$ өрнегін дәреже түрінде көрсетіндер.
 A) 3^2 B) 3^3 C) 3^{2n} D) 3^{n+2}
- Есептеңдер: $\left(\frac{14}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot (2,5)^3$.
 A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{7}$
- Санның кубы $3\frac{3}{8}$ -ке тең болса, оның алтыншы дәрежесін табыңдар.
 A) $10\frac{15}{16}$ B) $10\frac{25}{64}$ C) $11\frac{15}{16}$ D) $11\frac{25}{64}$
- Теңдеуді шешіндер: $x : 2^4 = 2^2$.
 A) $x = 54$ B) $x = 128$ C) $x = 32$ D) $x = 64$

2. БІРМҮШЕЛЕР МЕН КӨПМҮШЕЛЕР

2.1. Бірмүшелер

2.1.1. Бірмүше және оның стандарт түрі

Сандардан, айнымалылардан және олардың дәрежелерінен көбейту амалы арқылы құрастырылған өрнекті **бірмүше** деп атайды. Мысалы, $5a$; $ab \cdot ba$; $2x^3(-3)a^2cx$; -7 ; 3^4 ; x ; y^5 – бірмүшелер.

Көбейту амалының ауыстырымдылық және терімділік қасиеттерін қолдана отырып, $2x^3(-3)a^2cx$ өрнегін ықшамдайық:

$$2x^3(-3)a^2cx = 2(-3)x^3a^2cx = -6a^2cx^3 \cdot x = -6a^2cx^4.$$

Бірмүшенің осындай түрін, яғни бірінші орында сан көбейткіш, ал оған жалғастыра айнымалылар мен олардың дәрежелері жазылған түрін **бірмүшенің стандарт түрі** деп атайды. -3 ; a ; $-x$; y^3 түріндегі бірмүшелер де бірмүшенің стандарт түрі. Кез келген бірмүшені стандарт түрге келтіруге болады.

Бірмүшенің сан көбейткіші оның **коэффициенті** деп аталады. Мысалы, $-6a^2cx^4$ бірмүшесінің коэффициенті -6 -ға тең. x және $-ay^3$ бірмүшелерінің коэффициенттері сәйкесінше 1 -ге және -1 -ге тең, себебі $x = 1 \cdot x$; $-ay^3 = (-1) \cdot ay^3$.

Бірмүше құрамындағы айнымалылардың дәреже көрсеткіштерінің қосындысы **бірмүшенің дәрежесі** деп аталады. Мысалы, $-6a^2cx^4$ бірмүшесінің дәрежесі 7 -ге, ал $7abcxy$ -тің дәрежесі 5 -ке тең.

Егер бірмүшенің құрамында айнымалы болмаса, онда оның дәрежесі 0 -ге тең.

2.1.2. Бірмүшелерді көбейту. Бірмүшелерді дәрежеге шығару

Бірмүшелерді көбейткенде және дәрежеге шығарғанда, бірдей негізді дәрежелерді көбейту және дәрежені дәрежеге шығару ережелері қолданылады. Өдетте осыдан шығатын бірмүшені стандарт түрге келтіреді.

1-мысал. $-3a^2b^3c$ және $5a^3bc^2d$ бірмүшелерін көбейтейік.

$$-3a^2b^3c \cdot 5a^3bc^2d = (-3 \cdot 5) \cdot (a^2a^3) \cdot (b^3b) \cdot (c \cdot c^2) \cdot d = -15a^5b^4c^3d.$$

• Бірмүшелерді көбейткенде, олардың коэффициенттері көбейтіледі. Бірдей айнымалылардың дәреже көрсеткіштері қосылады, ал бір көбейткіш құрамына ғана енетін айнымалылар сол қалпында қалады, сөйтіп шыққан нәтижелер бір-біріне көбейтіледі.

• Бірмүшені дәрежеге шығару үшін әрбір көбейткішті осы дәрежеге шығарып, нәтижелерін көбейтсе, жеткілікті.

2-мысал. $2a^2y^3z$ бірмүшесін 4-дәрежеге шығару керек.

Шешуі: $(2a^2y^3z)^4 = 2^4(a^2)^4(y^3)^4z^4 = 16a^8y^{12}z^4$.



1. Қандай өрнектерді бірмүше деп атайды?
2. Бірмүшенің стандарт түрі қалай жазылады?
3. Стандарт түрдегі бірмүшенің коэффициенті деп нені айтады?
4. Бірмүшенің дәрежесі қалай анықталады?
5. Бірмүшелерді қалай көбейтеді? Оларды дәрежеге қалай шығарады?

Жаттығулар

А

2.1. Қолайлы тәсілмен есептеңдер.

- 1) $4 \cdot 37 \cdot (-25)$
- 2) $8 \cdot (-21) \cdot 125$
- 3) $2 \cdot 4 \cdot (-87) \cdot 125$
- 4) $\left(-\frac{3}{19}\right) \cdot (-90) \cdot 19$
- 5) $25 \cdot (-0,43) \cdot (-4)$
- 6) $1,25 \cdot (-1,47) \cdot (-8)$

2.2. Амалдарды орындаңдар.

- 1) $2b \cdot (-3c)$
- 2) $(-4a) \cdot (-5b)$
- 3) $8x \cdot \left(-\frac{1}{2}y\right)$
- 4) $\frac{3}{4}a \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right)$
- 5) $(-0,3m) \cdot (-5n)$
- 6) $(-3a)2b(-c)$

2.3. Дәрежеге шығарыңдар.

- 1) $(a^3)^2$
- 2) $(-3x^2)^2$
- 3) $(4m^3)^2$
- 4) $(-3y^2)^4$
- 5) $\left(-1\frac{1}{2}b^3\right)^2$
- 6) $\left(2\frac{1}{2}xy^2\right)^2$
- 7) $(-1,2c^4b^3)^2$
- 8) $(3a^2x)^3$

2.4. Бірмүшені стандарт түрде жазып, оның коэффициентін көрсетіңдер.

- 1) $0,5m \cdot 2x$
- 2) $-2aba$
- 3) $8b^2b$
- 4) $3ab(-2)b$
- 5) $\frac{4}{3}x^2y \cdot 4,5x^3$
- 6) $1,2xyz \cdot 5x$
- 7) $6p^2(-0,8)q$
- 8) $-5m^2n^32m$

2.5. Көбейтуді орындаңдар.

- 1) $-11a^2b \cdot 0,3a^2b^2$
- 2) $\frac{4}{9}xy^3 \cdot \frac{2}{3}xy$
- 3) $-0,6m^2n \cdot (-10mn^2)$
- 4) $x^5y \cdot xy^2z$
- 5) $-4ab \cdot (-a^2) \cdot (-b^3)$
- 6) $-\frac{1}{5}p^3q^4 \cdot 5p^2q^3$

2.6. Өрнектерді ықшамдаңдар.

- 1) $xy \cdot (-7xy^2) \cdot 4x^2y$
- 2) $10a^2b \cdot (-ab^2) \cdot 0,6a^3$

3) $10ab^3 \cdot (-a^2b) \cdot 0,5b^3$

4) $0,3y^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^4y^6\right)$

5) $0,3m^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}n^4m^6\right)$

6) $a^2b \cdot (-ab) \cdot (-ab^2)$

7) $xy \cdot (-x^5y^3) \cdot (-x^3y^8)$

8) $1\frac{1}{6}pq \cdot \left(-\frac{6}{7}p^9q^7\right)$

2.7. Дәрежеге шығарыңдар.

1) $(3a^2)^3$

2) $(-2x^4y^2)^3$

3) $(-m^2nk^3)^5$

4) $(2ab^2)^2$

5) $(-3a^2b)^4$

6) $(-a^3b^3c)^2$

2.8. Бірмүшенің квадраты түріне келтіріңдер.

1) $16a^4$

2) $169x^6$

3) $0,04b^{12}$

4) $\frac{9}{4}m^6$

2.9. Стандарт түрге келтіріңдер.

1) $(-2a^4b^2)^3$

2) $(-a^2bd^3)^5$

3) $(-2xy^3)^4$

4) $(-3x^2y)^3$

В

2.10. Бірмүшенің квадраты түріне келтіріңдер.

1) $0,01a^6b^4$

2) $9b^4c^8$

3) $100p^2q^6$

2.11. Бірмүшенің кубы түріне келтіріңдер.

1) $64a^9$

2) $0,001x^{12}$

3) $-\frac{27}{8}c^{15}$

4) $-27a^6y^9$

5) $1000a^3b^6$

6) $-0,008b^6y^9$

2.12. Ені $2m$ см, ұзындығы енінен 3 есе ұзын, ал биіктігі ұзындығынан 2 есе қысқа тік параллелепипедтің көлемі неге тең?2.13. $-12a^4y^3$ бірмүшесін 2 түрлі тәсілмен: 1) стандарт түрдегі екі бірмүшенің; 2) стандарт түрдегі үш бірмүшенің көбейтіндісіне жіктеңдер.2.14. 1) a^6b^{12} ; 2) $100p^8q^6$ өрнегін бірмүшенің квадраты түрінде жазыңдар.2.15. 1) x^9y^6 ; 2) $0,008a^{12} \cdot b^3$ өрнегін бірмүшенің кубы түрінде жазыңдар.

2.16. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (0,2x^2 \cdot y)^3 \cdot 1000x^4y^7 & 2) \left(\frac{1}{4}a^2b\right)^3 \cdot (-32a^2b) \\ 3) \left(-\frac{2}{3}mn^4\right)^2 \cdot (-27m^5n) & 4) -0,6c^7d^7 \cdot (0,5cd^2)^2 \end{array}$$

2.17. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (-8a^m \cdot x^{n+1}y^n) \cdot \left(-\frac{1}{2}a^{2-m}x^{n-1}y^2\right) & 2) (3x^ny^m)^2 \cdot (-2x^ny^m)^3 \\ 3) 0,64a^2b^3c \cdot 1\frac{9}{16}a^2b^7c^3 \cdot (-0,25a^2bc^4) & 4) \frac{(2ab)^3 \cdot (a^4b^2c)^2}{4a^2b^3c} \end{array}$$

С

2.18. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{3^5 + 3^9}{3^{-5} + 3^{-9}}; \quad 2) \frac{2^5 + 2^6 + 2^7}{2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7}}$$

2.19. Дәреже көрсеткіші: 1) 2-ге; 2) 3-ке; 3) 4-ке, ал коэффициенті 2-ге тең болатын x және y айнымалыларына қатысты барлық мүмкін стандарт бірмүшелерді жазыңдар.

2.20. Стандарт бірмүше түрінде жазыңдар.

$$1) \frac{(x^2y^3z^2)^4 \cdot (x^3y)^3}{(xy^2z^4)^2} \quad 2) \frac{(3^na^2b^{n+1})^2 \cdot (ab)^n}{(3a^2b^n)^2}, \quad n \in N$$

2.21. 4-тің тізбектес үш натурал көрсеткішті дәрежелерінің қосындысы 84-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

2.22*. Тізбектес үш натурал санның көбейтіндісіне ондағы ортанғы көбейткішті қосқанда, осы ортанғы санның кубы шығатынын көрсетіңдер.

2.23. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{5^{2n+3} \cdot 5^{2n-1}}{25^{2n+1}} \quad 2) \frac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}, \quad n, m \in N.$$

2.24. Бөлшектерді қысқартыңдар.

$$1) \frac{3^n + 3^{-n}}{9^n + 1}$$

$$2) \frac{5^{n+1} - 5^n}{4}$$

$$3) \frac{(4^n + 4^{n-1})^2}{4^{2n-2}}$$

Қайталауға арналған жаттығулар

2.25. $y = -3x + 5$ және $y = 7x - 8$ теңдеулері графиктерінің қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

2.26. Өрнектердің мәнін табыңдар.

$$1) \frac{4^3 \cdot 3^{10}}{6^{10}}$$

$$2) \frac{2^6 \cdot 6^{18}}{2^{25} \cdot 9^9}$$

2.27. 1) Натурал санның квадраты; 2) натурал санның 4-дәрежесі қандай цифрмен аяқталуы мүмкін?

2.2. Көпмүшелер

2.2.1. Көпмүше және оның стандарт түрі

$2ax^2 + by^2 - x + 7y - 9$ өрнегі $2ax^2$; by^2 ; $-x$; $7y$; -9 бірімүшелерінің қосындысы болып табылады. Мұндай өрнектер **көпмүшелер** деп аталады.

Анықтама 1. Бірімүшелердің қосындысы **көпмүше** деп аталады. Көпмүшені құрайтын бірімүшелердің әрқайсысын **көпмүшенің мүшелері** деп атайды. Мысалы, $2ax^2 + by^2 - x + 7y - 9$ көпмүшесінің мүшелері: $2ax^2$, by^2 , $-x$, $7y$ және -9 .

Егер көпмүше екі мүшеден құралған болса, онда оны **екімүше** деп, ал егер үш мүшеден құралса, онда оны **үшмүше** деп атайды. Бірімүшенің өзін бір ғана мүшеден құралған көпмүше деп есептейді.

Анықтама 2. Бірдей немесе коэффициенттері ғана өзгеше бірімүшелерді **ұқсас мүшелер** деп атайды.

Мысалы, $6ax^2y^3$ және $-2ax^2y^3$ – ұқсас мүшелер, ал $3ax^2y$ және $3axy^2$ мүшелері ұқсас емес.

$2x^2y + 5x^2y - 3x^2y = 4x^2y$ теңдігіне ұқсас мүшелердің алгебралық қосындысы осы қосындыға теңбе-тең бірімүшемен алмастырылған.

Анықтама 3. Ұқсас мүшелердің қосындысын оған теңбе-тең бірімүшемен алмастыруды **ұқсас мүшелерді біріктіру** деп атайды.

Сонымен, ұқсас мүшелерді біріктіру **теңбе-тең түрлендіру** болады.

$3a^2x+4+5ax^2-a^2x-9$ көпмүшесінде $3a^2x$ және $-a^2x$ мүшелері, 4 және -9 мүшелері ұқсас мүшелер болады. Ұқсас мүшелерін біріктіргеннен кейін бұл көпмүшені былай жазуға болады: $2a^2x+5ax^2-5$. Шынында да,

$$\begin{aligned} 3a^2x + 4 + 5ax^2 - a^2x - 9 &= \\ &= (3a^2x - a^2x) + 5ax^2 + (4 - 9) = 2a^2x + 5ax^2 - 5. \end{aligned}$$

Анықтама 4. Көпмүшенің дәрежесі деп оның құрамындағы бірімүше дәрежелерінің ең үлкенін айтады.

Мысалы, $2a^2x+5ax^2-5$ көпмүшесі – үшінші дәрежелі көпмүше, ал $5x^4-3y^4+2x^2y^3-3x^3-4yx^2+5xy+7y-9$ көпмүшесінің дәрежесі 5-ке тең, себебі оның құрамындағы $2x^2y^3$ бірімүшесінің дәрежесі ең үлкені: $2+3=5$. Осы көпмүшені дәрежесінің кему ретімен жазайық:

$$2x^2y^3 + 5x^4 - 3y^4 - 3x^3 - 4x^2y + 5xy + 7y - 9.$$

Бұл көпмүшенің ұқсас мүшелері жоқ. Мұндай көпмүшелерді **стандарт түрдегі** көпмүше деп атайды.

Кез келген көпмүшені стандарт түрде жазуға болады. Ол үшін оның әрбір мүшесін стандарт түрге келтіріп, ұқсас мүшелерін біріктіреді және мүшелерін дәрежесінің кему ретімен орналастырады.

Егер көпмүше құрамында дәрежелері бірдей ұқсас емес бірнеше мүше бар болса, онда бұл мүшелерді бірінен соң бірін қалауымызша орналастырамыз. Мысалы, $5x^4+2x^2y+y^3-3xy^2-5$ көпмүшесінің $2x^2y$, y^3 , $-3xy^2$ мүшелерінің дәрежелері бірдей, ол 3-ке тең. Сондықтан бұл көпмүшені стандарт түрде түрліше жазуға болады: $5x^4+2x^2y+y^3-3xy^2-5$, $5x^4-3xy^2+2x^2y+y^3-5$, $5x^4+y^3+2x^2y-3xy^2-5$ және т.с.с.

2.2.2. Көпмүшелерді қосу және азайту

$3a^3-5a^2b+7ab^2+b^3$ және $-5a^3-6ab^2+4b^3$ көпмүшелерін қосайық. Ол үшін көпмүшелерді жақшаға алып, қосамыз да, жақшаларды ашамыз. Сонан соң ұқсас мүшелерін біріктіреміз:

$$\begin{aligned} (3a^3 - 5a^2b + 7ab^2 + b^3) + (-5a^3 - 6ab^2 + 4b^3) &= \\ &= 3a^3 - 5a^2b + 7ab^2 + b^3 - 5a^3 - 6ab^2 + 4b^3 = -2a^3 - 5a^2b + ab^2 + 5b^3. \end{aligned}$$

$6x^2-2x+5$ көпмүшесінен $3x^2-2x+1$ көпмүшесін азайтайық. Ол үшін көпмүшелердің айырмасын жазып, жақшаны ашқаннан соң ұқсас мүшелерін біріктіреміз:

$$(6x^2 - 2x + 5) - (3x^2 - 2x + 1) = 6x^2 - 2x + 5 - 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 + 4.$$

Сонымен, көпмүшелерді қосқанда және азайтқанда нәтижеде көпмүше шығады. Бұл амалдар мынадай ережелер бойынша орындалады:

- Егер жақша алдындағы таңба «плюс» болса, онда жақшаны ашқанда көпмүше мүшелерін өз таңбаларымен жазады.
- Егер жақша алдындағы таңба «минус» болса, онда жақшаны ашқанда көпмүше мүшелерін қарама-қарсы таңбамен жазады.



1. Көпмүше деп нені айтамыз?
2. Көпмүшенің ұқсас мүшелері деп нені атаймыз?
3. «Ұқсас мүшелерді біріктіру» дегенді қалай түсінесіңдер?
4. Көпмүшенің дәрежесі деп нені атаймыз?
5. Көпмүшені стандарт түрге қалай келтіреді?
6. Көпмүшелерді қосу және азайту ережелерін айтыңдар.

Жаттығулар

А

2.28. Ұқсас мүшелерін біріктіріңдер.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $5x - 7xy + 4xy$ | 2) $2xy - 7xy + 6y^2$ |
| 3) $2x^4 - 3x + 4x^2 - x^4 + 4x$ | 4) $2ax - x^2 + 3ax - y^2 + 2x^2$ |
| 5) $4mn - n^2 + m^2 - 2mn$ | 6) $8px + p^2 - x^2 + 4p^2$ |

2.29. Ұқсас мүшелерін біріктіріңдер.

- | | |
|--|---|
| 1) $-x^4 + 3x^3 - 4x^4 - 2x^2 - 3x^2$ | 2) $2m^4 - 3m^5 + m^6 + 1 - m^4 + 4m^5 - m^6$ |
| 3) $5a^2b - 5ab^2 - ab - 2a^2b + 10ab^2$ | 4) $3mn^3 - n^3m - 5mn^3 - n^3 + m$ |

2.30. Өрнектердің қосындысын табыңдар.

- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| 1) $5x$ және $3x + 7$ | 2) $8a$ және $1 - 3a$ |
| 3) $-y$ және $y - 1$ | 4) $-5m$ және $-m - n$ |
| 5) $2x - 3y$ және $-y - x$ | 6) $1,5a^2 + 2b^2$ және $2a^2 - b^2$ |

2.31. Қосуды орындаңдар.

- | | |
|--|--|
| 1) $8y + (3x + 5y)$ | 2) $(4a + 2) + (-a - 1)$ |
| 3) $\left(\frac{1}{2}m + \frac{3}{4}\right) + \left(2\frac{1}{2} - m\right)$ | 4) $0,4b + (1,2b - 0,1)$ |
| 5) $(15x + 2y) + (4x - 3y)$ | 6) $(4p^2q - 3pq^2) + (-p^2q + 2pq^2)$ |

2.32. Көпмүшелердің айырмасын табыңдар.

- | | |
|-----------------------|-----------------------------------|
| 1) $3a$ және $7 + 2a$ | 2) $5b^2 - 9$ және $4b^2 - b + 5$ |
|-----------------------|-----------------------------------|

- 3) $4x+2$ және $x+1$ 4) $3m^2+m$ және $1-m+3m^2$
 5) $2a-3b$ және $-b-a$ 6) a^2+a+1 және a^2-a+1

2.33. $3x^3-4x+5$ және x^3-4x-3 көпмүшелері берілген. Олардың:

- 1) қосындысын; 2) біріншісі мен екіншісінің айырмасын;
 3) екіншісі мен біріншісінің айырмасын құрастырып, ықшамдаңдар.

2.34. Өрнектердің қосындысы мен айырмасын табыңдар.

- 1) $x+y$ және $x-y$ 2) x^2-y^2 және x^2+y^2
 3) a^2-a+4 және $-a^2-a-4$ 4) b^3-8 және $-b^3-8$

2.35. Стандарт түрге келтіріңдер.

- 1) $21a^2 - (12a - 5 + 21a^2)$ 2) $(x^2 + x - 1) - (x^2 - x + 1)$
 3) $-7x^2 + x + (x + 6x^2)$ 4) $(12 - 5p^2) + (p^3 + 2p^2 - p + 15)$

2.36. Көпмүшелердің мәнін табыңдар.

- 1) $6a^5-3a^2+7-2a^5-4a^5+4a^2$, мұндағы $a=-5$
 2) $5x^2y-xy^2-4x^2y+xy^2-xy+7$, мұндағы $x=-1$, $y=2$

2.37. Көпмүшелерді стандарт түрге келтіріңдер.

- 1) $3aa^4+3aa^3-5a^2a^3-5a^2a$ 3) $3x \cdot 4y^2-0,8y \cdot 4y^2-2xy \cdot 3y+y \cdot 3y^2-1$
 2) $5a \cdot 2b^2-5a \cdot 3ab-a^2b+6ab^2$ 4) $2m^2n^3-mn^3-m^4-m^2n^3+mn^3+2m^4$

В

2.38. Стандарт түрге келтіріңдер.

- 1) $(1+3x) + (x^2-2x) - (2x^2-x)$
 2) $(7,3c-c^2+4) + 0,5c^2 - (8,7c-2,4c^2)$
 3) $(-12a^2+5a) + (a+11a^2) - (a^2-1)$
 4) $(b^2-5b) + (5b-2b^2) - (4-2b^2)$

2.39. 1) $(a-b) + (b-c) + (c-a)$ өрнегінің мәні 0-ге;

- 2) $(x^2-7xy) - (5-4xy) + (3xy-x^2)$ өрнегінің мәні -5-ке тең екенін дәлелдендер.

2.40. Теңдеулерді шешіңдер.

- 1) $(3,2x-1,8) - (5,2x+3,4) = -5,8$
 2) $1 - (0,5y-15,8) = 12,8 - 0,7y$

3) $3,8 - 1,5x + (4,5x - 0,8) = 2,4x + 3$

4) $3,5y + 0,8 = 5,5y - (1,2y + 0,8) - 2,4$

2.41. Теңдеулерді x айнымалысына қатысты шешіңдер.

1) $(5x - 3a) - (2x + 5a) = 4a$; 2) $(x + 5m) - (3m - 2x) = 17m$;

3) $4x - (3p - x) + (8x - 5p) = 5p$; 4) $(x + b) + (x + 2b) - (x - 3b) = 8b$

5) $x^2 - (x + c) - (x^2 - 2x - 3c) = 0$; 6) $(6x - 4n) - (2x^2 + x) + (2x^2 - n) = 0$

2.42. $\left(\frac{3}{4}x^2 - 1,4xy - 2,5y + 4\right) - \left(2y^2 - \frac{7}{5}xy + 0,75x^2\right)$ көпмүшесінің мәні x -ке тәуелсіз екенін көрсетіңдер.

2.43. Өрнектерді ықшамдаңдар.

1) $(10a - 6b + 5c - 4d) - (9a - 2b - 4c + 2d)$

2) $(5a^2 - ax + x^2) + (3a^2 + 2ax - 3x^2) - (4ax + 2x^2 + a^2)$

3) $(2m^4 + 5m^3n - 3m^2n^2 - mn^3) + (3m^4 - 8m^3n^2 - 6mn^3)$.

2.44. Көпмүшелердің қосындысын тауып, ұқсас мүшелерін біріктіріңдер.

1) $5x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - 4xy^3, 3x^4 - 8x^3y + 9x^2y^2 + xy^3$

және $-6x^4 + x^3y + 5x^2y^2 - 9xy^3$

2) $-\frac{5}{6}a^2 + 4\frac{2}{3}ab + \frac{3}{4}b^2, \frac{5}{12}a^2 - \frac{4}{3}ab - \frac{7}{4}b^2$ және $2\frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{4}ab - b^2$

3) $5\frac{1}{4}m^3 + 2\frac{1}{6}m^2n + 3\frac{1}{2}mn^2 - 8\frac{2}{3}n^3$ және $13m^2n - 1\frac{1}{4}mn^2 - 3\frac{5}{6}m^3 + n^3$

2.45. Үшбұрыштың бір қабырғасы $a+b$ -ға тең, екіншісі біріншісінен $a-6$ -ға ұзын, ал үшіншісі $2b+6$ -ға тең. Үшбұрыштың периметрін табыңдар.

2.46. $4,6x^2y - 2,2xy + 7y^2 - (7,8xy - 3,4x^2y + 7y^2)$ көпмүшесінің мәнін:

1) $x=2, y=5$; 2) $x=-2, y=3$ болғанда анықтаңдар.

2.47. Бір қосылғышы: 1) x^3+4 және 2) $2x^3-x^2-x$ -ке тең болатындай етіп, $3x^3-2x^2-x+4$ көпмүшесін екі қосылғышқа жіктеңдер.

С

2.48. $x=2a^2-3ab-b^2, y=-a^2+2ab+b^2, z=4a^2+2ab$ болса, онда: 1) $x+y+z$; 2) $x-y-z$; 3) $-x-y+z$ өрнектерінде x, y, z айнымалыларын алмастырып, шыққан көпмүшелерді ықшамдаңдар.

2.49. 1) a^3+2a^2-3a-5 ; 2) $4x^4+2a^3+5a^2-4$ көпмүшесін қандай да бір тәсілмен екімүше мен үшмүшенің айырмасы түріне келтіріңдер.

2.50. A -ның орнына қандай көпмүшені қойғанда теңдік теңбе-теңдікке айналады?

1) $A + (6x^2 - 3xy) = 8x^2 + 7xy - y^2$

2) $A - (8a^n - 2b^m + c) = 4a^n + 5b^m + c$

3) $3x^{n+1} + 10x^n - 7x - A = 5$

2.51. Қандай көпмүшені $5x^n - x^3 - x + 7$ көпмүшесіне қосқанда қосынды: 1) 0-ге; 2) 5-ке; 3) $2x-6$ -ға; 4) x^3-3x+2 -ге; 5) x^n+1 -ге теңбе-тең болады?

2.52. Бір айнымалыға ғана тәуелді және барлық мүшелерінің дәрежелері жұп болып келген көпмүшенің мәні айнымалының таңбасын қарама-қарсы таңбаға ауыстырғанда өзгермейтінін дәлелдеңдер.

2.53. Көпмүшенің ең кіші мәнін табыңдар.

1) $1 + 2x^2 + (x^4 - x^2 + 1)$

2) $4a^2 - 4 - (5 + 3a^2) + (a^4 - a^2)$

2.54. Теңдеулерді x айнымалысына қатысты шешіңдер.

1) $x^2 - (x + m) - (x^2 - 2x - 3m) = 0$

2) $(6x - 4a) - (2x^2 + x) + (2x^2 - a) = 0$

3) $(5x^2 + 2x - p) - (3p - 2x + 5x^2) = 0$

4) $(x - a - b) + (2x + 3a + b) = (2a - b) - (2a - 5b)$

Қайталауға арналған жаттығулар

2.55. Бірмүшелерді стандарт түрге келтіріңдер.

1) $(2a^2) \cdot \frac{1}{4}a^2$ 2) $(-3b^4)^5 \cdot \frac{1}{27}b^3$ 3) $(-5a^3b^2)^2 \cdot (-0,2a^2b^3)^{-1}$

2.56. Тізбектес екі жұп санның көбейтіндісі 4-ке еселік болатынын көрсетіңдер.

2.57. Есептеңдер.

$$\left(\frac{3\frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 1\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6 - 2\frac{1}{3}}{4,6 + 2\frac{1}{3}} \right) \cdot 5,2 : \left(\frac{0,5}{\frac{1}{7} - 0,125} - 19,5 \right)$$

2.58. Мектепке төменгі сыныптың 12 оқушысын марапаттау мақсатында түрлі түсті бояулар мен қарындаштар жиынтығын сатып

алу көзделді. Дүкенде бояулар жиынтығының біреуі 210 тг, ал қарындаштар жиынтығы 120 тг тұрады. Сатып алынатын заттардың жалпы құны 1960 теңгеден аспауы үшін бояулар жиынтығының нешеуін сатып алу керек?

2.59. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 2 = 0$ теңдеуінің теріс түбірі болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

2.3. Бірмүше мен көпмүшенің көбейтіндісі

2.3.1. Бірмүшені көпмүшеге көбейту. $4ab^2$ бірмүшесін $3a^2 - 5a^2b + 6a^2c$ көпмүшесіне көбейту қажет болсын.

Көпмүше – бірмүшелердің алгебралық қосындысы. Сондықтан көбейтудің үлестірімділік заңын қолдана отырып, теңбе-тең түрлендіру арқылы

$$\begin{aligned} 4ab^2 \cdot (3a^2 - 5a^2b + 6a^2c) &= 4ab^2 \cdot 3a^2 - 4ab^2 \cdot 5a^2b + 4ab^2 \cdot 6a^2c = \\ &= 12a^3b^2 - 20a^3b^3 + 24a^3b^2c = 24a^3b^2c - 20a^3b^3 + 12a^3b^2 \end{aligned}$$

көпмүшесін аламыз. Осыдан төмендегідей *ереже* шығады.

Бірмүшені көпмүшеге көбейту үшін бірмүшені көпмүшенің әрбір мүшесіне көбейтіп, шыққан көбейтінділерді қосу керек.

1-мысал. $-2a^2xy$ бірмүшесін $4a^2xy - 5ax^2y^2 + a^2xy^2$ көпмүшесіне көбейту керек.

Шешуі:

$$\begin{aligned} -2a^2xy(4a^2xy - 5ax^2y^2 + a^2xy^2) &= \\ = -2a^2xy \cdot 4a^2xy - 2a^2xy(-5ax^2y^2) - 2a^2xy \cdot a^2xy^2 &= \\ = -8a^4x^2y^2 + 10a^3x^3y^3 - 2a^4x^2y^3. \end{aligned}$$

2-мысал. $2x^3 - 2x(x^2 - 4x + 3) + 6x - 4$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x(x^2 - 4x + 3) + 6x - 4 &= \\ = 2x^3 - 2x^3 + 8x^2 - 6x + 6x - 4 &= 8x^2 - 4. \end{aligned}$$

3-мысал. $x^2 + \frac{6x+7}{4} + \frac{8-5x}{3} = 5 - x(1-x)$ теңдеуін шешу қажет.

Шешуі. Ол үшін теңдеуді бөлшектердің ортақ бөлімі 12-ге көбейтіп, теңдеуді мына түрде жазамыз:

$$\left(x^2 + \frac{6x+7}{4} + \frac{8-5x}{3}\right) \cdot 12 = (5-x(1-x)) \cdot 12,$$

$$12x^2 + \frac{6x+7}{4} \cdot 12 + \frac{8-5x}{3} \cdot 12 = 60 - 12x(1-x),$$

$$12x^2 + 18x + 21 + 32 - 20x = 60 - 12x + 12x^2,$$

$$12x^2 + 18x - 20x + 12x - 12x^2 = 60 - 21 - 32,$$

$$10x = 7,$$

$$x = 0,7.$$

Жауабы: $x = 0,7$.



1. Бірмүшені көпмүшеге көбейту ережесін айтыңдар.
2. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеу деп нені айтамыз?

Жаттығулар

А

2.60. Көбейтуді орындаңдар.

- | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $4 \cdot (x+3)$ | 2) $3 \cdot (x+8)$ | 3) $2 \cdot (7-a)$ | 4) $5 \cdot (p-10)$ |
| 5) $6 \cdot (a-2b)$ | 6) $(m+3n) \cdot 4$ | 7) $2 \cdot (3x-2y) \cdot 3$ | 8) $3 \cdot (2p-5q) \cdot 7$ |

2.61. Көбейтуді орындаңдар.

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|----------------------|
| 1) $(x+y) \cdot a$ | 2) $b \cdot (x-y)$ | 3) $3x \cdot (2a+b)$ | 4) $2y \cdot (3x-y)$ |
| 5) $5x \cdot (6x+3y)$ | 6) $3a \cdot (-4b-2a)$ | 7) $-6a \cdot (5b-2a)$ | 8) $8m \cdot (m+n)$ |

2.62. Көбейтіндіні көпмүше түріне келтіріңдер.

- | | |
|--|---|
| 1) $-4x \cdot (2x^2 - 5x + 3)$ | 2) $(-2x) \cdot (x^2 - x + 1)$ |
| 3) $\left(-\frac{1}{2}a\right) \cdot (-4a^2 - 8a + 6)$ | 4) $\left(-\frac{1}{3}b\right) \cdot (-9b^2 + 3b - 12)$ |
| 5) $2ab \cdot (2a^2 - 5ab + b^2)$ | 6) $-3ab \cdot (2a^2 - 7ab - b^2)$ |
| 7) $-\frac{1}{2}xy \cdot (5x^2 + 10xy - 4y^2)$ | 8) $\left(-1\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{4}mn + n^2\right) \cdot (-2mn)$ |

2.63. Өрнекті ықшамдап, оның мәнін табыңдар.

- 1) $2(3x + 1) - 5(x + 1)$, мұндағы $x=2$
- 2) $20x - 4(2x - 1) + 5(1 - 2x)$, мұндағы $x=-3$
- 3) $5y - 2(8y - 1) + 4(3y + 1)$, мұндағы $y=10$
- 4) $12(2 - 3m) + 35m - 9(m + 1)$, мұндағы $m=2$

2.64. Көпмүше түріне келтіріңдер.

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1) $10 \cdot (m+5) + 2 \cdot (-2m+3n)$ | 2) $7x \cdot (4y-x) + 4x(x-7y)$ |
| 3) $4a(7x-1) - 7(4ax+1)$ | 4) $3a^2 - 2a(5+2a) + 10a$ |
| 5) $a(a+b) + b(a-b)$ | 6) $2a^2 - a(2a-5b) - b(2a-b)$ |
| 7) $5a(6a+3b) - 6a(5b-2a)$ | 8) $8m(m+n) - 3n(2m-4n)$ |

2.65. Бірмүшелерді көбейтінді түрінде жазыңдар.

- | | | |
|---------------|-------------|----------------|
| 1) $8b^3$ | 2) 3^4y^8 | 3) $-6ab^2$ |
| 4) $27a^6x^3$ | 5) $9x^4$ | 6) $-10m^3n^3$ |
| 7) a^6 | 8) $81y^8$ | 9) p^5q^7 |

2.66. Теңдеулерді шешіңдер.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1) $6 \cdot (x - 3) - 2(x + 2) = 10$ | 2) $5(x - 1) - 4(x - 3) = -20$ |
| 3) $0,6(x - 0,6) + 0,8(x - 0,4) = 1$ | 4) $0,3(0,4x - 1,2) + 0,36x = 3,4$ |
| 5) $8(x - 7) - 3(2x + 9) = 15$ | 6) $0,15(y - 4) = 9,9 - 0,3(y - 1)$ |
| 7) $0,6 - 0,5(x - 1) = x + 0,5$ | 8) $0,5(2y - 1) - (0,5 - 0,2y) + 1 = 0$ |

В

2.67. Көбейтуді орындандар.

- | | |
|---|---|
| 1) $4a^2b^2 \cdot (2a^3 - 3a^2 + 3a - 1)$ | 2) $-2a^2b \cdot (8a^3 - 4a^2b^2 - 3ab^2 + 5b^3)$ |
| 3) $-3x^2y \cdot (-2xy^3 + 5x^2y^2 - 5x^3y + 3x^4)$ | 4) $-5abc \cdot (4ab^2c - 7a^2bc^2 + 3a^2bc)$ |

2.68. Өрнектерді ықшамдаңдар.

- 1) $6x \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y \right) - 12y \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \right)$

2) $10a(5a^2 - 7b) - 6a(5b + 7a^2) - 3ab$

3) $-2b(a^3 - 2b) - b(a^3 + 4b^2)$

4) $1,4x(0,5x + 0,3y) - 5(0,4y^2 - 4xy) + 0,2(8y - 5x)$

5) $5x(6x + 3y) + 3y(2x - 4y) - 6x(5y - 2x)$

6) $4y - 2(y - 3) - 3(y - 3(4 - 2y) + 8)$

2.69. 1) $18^6 + 18^5$ қосындысы 19-ға; 2) $122^{10} - 122^9$ айырмасы 11²-на; 3) $7^6 - 7^4$ айырмасы 48-ге; 4) $4^{18} + 4^{16}$ қосындысы 34-ке бөлінетінін көрсетіңдер.

2.70. Метрі x теңгеден m метр сәтен және n метр жібек сатылды. Егер жібектің бір метрі сәтеннің бір метрінен y теңге қымбат болса, онда сатылған тауарлардан қандай түсім алынады?

2.71. Екі таңбалы санның a ондықтары және b бірліктері бар. Осы сан цифрларының арасына 0 цифры жазылып, үш таңбалы сан алынды. Алынған үш таңбалы сан мен берілген екі таңбалы санның айырмасы 90-ға еселік болатынын көрсетіңдер.

C

2.72. Егер $A=ax$, $B=cy-b$, $C=x$ және $D=acy-ab$ болса, онда $A \cdot B - C \cdot D$ өрнегі $C \cdot D - A \cdot B$ өрнегіне теңбе-тең болатынын дәлелдеңдер.

2.73. y айнымалысының кез келген мәнінде $y(2 + y - y^3) - \frac{2}{3}(6 + 3y + 1,5y^2)$ өрнегінің мәні теріс сан болатынын дәлелдеңдер.

2.74. Теңдеулерді шешіңдер.

1) $\frac{x(x+6)}{2} - \frac{x(x+14)}{3} - \frac{x^2+1}{6} = 0$

2) $\frac{y(2y-1)}{12} - \frac{y^2+1}{6} = y$

3) $\frac{6+7y^2}{3} + \frac{y(5-8y)}{4} = \frac{y(y+2)}{3}$

4) $\frac{2m^2+1}{4} + 3 = \frac{m}{6} - \frac{m(1-2m)}{4}$

2.75. Бүтін санның квадратына өзін қосқанда жұп сан шығатынын көрсетіңдер.

2.76. Жалпы жағдайда құрамында a жүздік, b ондық және c бірлігі бар үш таңбалы санды $\overline{abc}$ түрінде жазады. Бұл санды мынадай түрде де

жазуға болады: $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$. Мысалы, $845 = 100 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 5$.
 $\overline{abc} - \overline{cba}$, $a > c$ саны 99-ға бөлінетінін көрсетіңдер.

2.77. $\overline{ab} + \overline{ba}$ саны 11-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

2.78. Негізі 2-ге тең тізбектес үш дәреженің қосындысы 14-ке бөлінетінін көрсетіңдер.

2.79. Негізі 5-ке тең тізбектес екі дәреженің қосындысы 30-ға бөлінетінін көрсетіңдер.

2.80. Катер өзен ағысымен 4 сағ ішінде өзінің 2 сағатта өзен ағысына қарсы жүрген жолымен салыстырғанда 2,4 есе көп жол жүрді. Егер өзен ағысының жылдамдығы 1,5 км/сағ болса, онда катердің тұнық судағы жылдамдығы қандай?

2.81. Элеваторға сапасы екі түрлі 1400 т бидай түсті. Өңдеу барысында бидайдың бір түрінен 2% қоқыс, ал екінші түрінен 3% қоқыс шықты. Таза бидай салмағы 1364 т болды. Элеваторға әр сорттан неше тонна бидай түскен?

2.82. 1) $3^9 + 3^7 + 3^6$ саны 93-ке; 2) $11^9 - 11^8 + 11^7$ саны 37-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

2.83. Театрдың көрермендер залында үлкен және кіші 80 электр лампы бар. Үлкен лампының кеш бойы жанып тұрғаны үшін 13 тг, ал кіші лампының жанып тұрғаны үшін $9\frac{3}{4}$ тг төленеді. Егер көрермендер залын кеш бойы жарықтандыру үшін 884 тг төленсе, онда залда неше үлкен лампы және неше кіші лампы бар?

2.84. Түзулердің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

1) $y = 3x - 5$ және $y = 4x - 9$

2) $y = 6x + 3$ және $y = 3x - 6$

2.85. Өрнектерді ықшамдаңдар.

1) $\left(\frac{1}{3}a^5 \cdot y^3\right)^2 \cdot (-3ay)^3$

2) $(-30x^2y^2)^2 : (-10xy^2)^3$

2.86. Үш таңбалы сан 7 цифрымен аяқталады. Егер осы цифрды бірінші орынға қойса, онда берілген сан 324-ке артады. Осы үш таңбалы санды табыңдар.

2.87. Бөлшекті есептеп, шыққан санның 4,7% -ін табыңдар.

$$\frac{4\frac{4}{7} - \frac{2}{3} \cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12} + 4,375\right) : 19\frac{8}{9}}$$

2.4. Көпмүшелерді көбейту

2.4.1. Көпмүшені көпмүшеге көбейту. $m-n$ және $a+b-c$ көпмүшелерін көбейту керек болсын. Олардың көбейтіндісі $(m-n)(a+b-c)$ болады. $x=m-n$ деп алып, бірмүшені көпмүшеге көбейту ережесін қолданамыз. Сонда

$$(m-n)(a+b-c) = x(a+b-c) = xa + xb - xc$$

теңдігін аламыз. $xa+xb-xc$ өрнегіндегі x -тің орнына $m-n$ -ді қойып, тағы да бірмүшені көпмүшеге көбейту ережесін қолданамыз. Сонда

$$\begin{aligned} xa + xb - xc &= (m-n)a + (m-n)b - (m-n)c = \\ &= ma - na + mb - nb - mc + nc \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. Сонымен,

$$(m-n)(a+b-c) = ma - na + mb - nb - mc + nc.$$

Осыдан соңғы өрнек $m-n$ көпмүшесінің әрбір мүшесін $a+b-c$ көпмүшесінің әрбір мүшесіне көбейткеннен шыққанын көреміз. Онда төмендегідей *ереже* шығады.

Көпмүшені көпмүшеге көбейту үшін бірінші көпмүшенің әрбір мүшесін екінші көпмүшенің әрбір мүшесіне көбейтіп, шыққан көбейтінділерді қосу қажет.

n мүшесі бар көпмүшені m мүшесі бар көпмүшеге көбейткенде $n \cdot m$ мүшесі бар көпмүше шығатынын көру қиын емес.

1-мысал. $5x^3 + (y^2 + 5x)(xy - x^2)$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі. Алдымен y^2+5x және $xy-x^2$ екімүшелерін бір-біріне көбейтіп, ұқсас мүшелерін біріктіру қажет:

$$\begin{aligned} 5x^3 + (y^2 + 5x)(xy - x^2) &= 5x^3 + y^2 \cdot xy - y^2 \cdot x^2 + 5x \cdot xy - 5x \cdot x^2 = \\ &= 5x^3 + xy^3 - y^2x^2 + 5x^2y - 5x^3 = xy^3 - y^2x^2 + 5x^2y. \end{aligned}$$



Көпмүшелерді көбейту ережесін айтыңдар.

Жаттығулар

А

2.88. Көбейтуді орындаңдар.

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $(a + b)(x - y)$ | 2) $(a - b)(x + y)$ | 3) $(m - n)(p + q)$ |
| 4) $(a + b)(a + 2)$ | 5) $(y + 2)(y - 3)$ | 6) $(a + 1)(a - 3)$ |
| 7) $(p + x)(q - y)$ | 8) $(a + b)(c - d)$ | 9) $(x + 1)(x - 1)$ |

2.89. Өрнектерді ықшамдаңдар.

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1) $(2x + 1)(x + 4)$ | 2) $(2x + 3)(5x - 4)$ |
| 3) $(3x - 2)(2a - 1)$ | 4) $(5a - 3b)(4a - b)$ |
| 5) $(2m + 3n)(2m - 5n)$ | 6) $(3x + 2y)(x - y)$ |
| 7) $(5b - 4c)(2b - 2c)$ | 8) $(p - 3q)(8p + 5q)$ |

2.90. Көпмүше түріне келтіріңдер.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $(x + m)(y + m)$ | 2) $(x + 8)(x - 1)$ |
| 3) $(-a + y)(-y - 2)$ | 4) $(a - 4)(2a + 1)$ |
| 5) $(2x - 1)(2x + y)$ | 6) $(m - n)(x + y)$ |
| 7) $(5 - a)(4 - a)$ | 8) $(6m - 3)(2 - 5m)$ |

2.91. Көпмүше түрінде жазыңдар.

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $(6a^2 + 5b^2)(2a^2 - 4b^2)$ | 2) $(-7m^2 - 8n^2)(-m^2 + 3n^2)$ |
| 3) $(4n^2 - 1)(n^2 + 5)$ | 4) $(8x^2 - 3xy)(3x^3 - xy)$ |
| 5) $(5ab^2 - 4b^3)(3ab^3 - 4a^2)$ | 6) $(7x^3y^2 - xy)(-2x^2y^2 + 5xy^3)$ |

В

2.92. Көбейтуді орындаңдар.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(2a^2 - 3b)(a^2 + 2ab + 5b^2)$ | 2) $(x^2 - 2xy)(x^2 - 5xy + 3y^2)$ |
|------------------------------------|------------------------------------|

$$\begin{array}{ll} 3) (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) & 4) (a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3) \\ 5) (5a-4b)(a^3+2a^2b-5ab^2-3b^3) & 6) (2x+3y)(x^3+3x^2y-3xy^2+4y^3) \end{array}$$

2.93. Көпмүше түріне келтіріңдер.

$$\begin{array}{ll} 1) (x-2)(x+3)+(x+2)(x-3) & 2) (a-1)(a+2)+(a+1)(a-2) \\ 3) (a+1)(a+2)+(a+3)(a+4) & 4) (x-1)(x-2)+(x-3)(x-4) \end{array}$$

2.94. Көбейтуді орындаңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (4b^2+2a^2-4ab)(3ab+2a^2-3b^3) & 2) (5ab-3a^2-2b^2)(-4b^2-ab+6a^2) \\ 3) (7+3a^2-3a)(5-2a-a^2) & 4) (5xy^2-3x^3+2x^2y)(2x^2-xy-4y^2) \end{array}$$

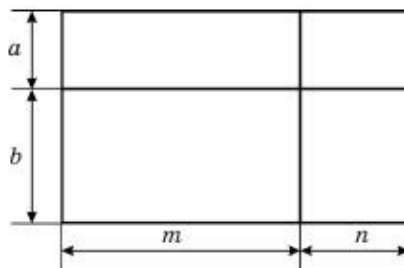
2.95. Теңдеулердің түбірін табыңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (2x-1)(3x+4)-6x^2=16; & 2) (1-2y)(1-3y)=(6y-1)y-1 \\ 3) 7+2x^2=2(x+1)(x+3) & 4) (y+4)(y+1)=y-(y-2)(2-y) \end{array}$$

2.96. 2.1-суреттің көмегімен n , m , a , b айнымалыларының оң мөндерінде $(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$ теңдігінің геометриялық мағынасын түсіндіріңдер.

2.97. Амалдарды орындаңдар.

$$\begin{array}{l} 1) (x-a)(x-b)(x-c) \\ 2) (x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) \\ 3) (a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c) \\ 4) (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) \end{array}$$



2.1-сурет

2.98. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$\begin{array}{ll} 1) (a-b)(a+b)=a^2-b^2 & 2) (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \\ 3) (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 & 4) (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \\ 5) (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

2.99. Тізбектес екі санның көбейтіндісі келесі тізбектес сандардың көбейтіндісінен 38-ге кем. Осы сандарды табыңдар.

2.100. Егер $ab+c^2=0$ болса, онда $(a+c)(b+c)+(a-c)(b-c)=0$ болатынын дәлелдеңдер.

2.5. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеу тәсілдері

2.5.1. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару. Теңдеулерді шешуде, бөлшектерді қысқартуда және бірқатар алгебралық есептерді шығару барысында көпмүшені бірнеше көпмүшенің көбейтіндісімен алмастырған тиімді. Көпмүшені екі немесе бірнеше көпмүшенің көбейтіндісі түріне келтіруді **көпмүшені көбейткіштерге жіктеу** деп атайды.

$9x^2y-21y^2$ көпмүшесін қарастырайық. Бұл көпмүшенің әрбір мүшесінің құрамында $3y$ -ке тең көбейткіштері бар:

$$9x^2y - 21y^2 = 3y \cdot 3x^2 - 3y \cdot 7y.$$

Онда

$$9x^2y - 21y^2 = 3y(3x^2 - 7y)$$

теңдігі орындалады, яғни біз $9x^2y-21y^2$ көпмүшесін $3y$ бірімүшесі мен $3x^2-7y$ көпмүшесінің көбейтіндісіне жіктедік. Көбейткіштерге жіктеудің бұл тәсілін **ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару** деп атайды.

Мысал қарастырайық.

1-мысал. $12a^2b-18ab^2-30ab^3$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік.

Шешуі.

$$\begin{aligned} 12a^2b - 18ab^2 - 30ab^3 &= 6ab \cdot 2a - 6ab \cdot 3b - 6ab \cdot 5b^2 = \\ &= 6ab(2a - 3b - 5b^2). \end{aligned}$$

Ескерту. Қарастырылған мысалда қосылғыштардың ортақ көбейткіштері бірнешеу: 2; 3; $2a$; $3b$; 6; a ; ab және т.с.с.

Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару үшін барлық коэффициенттің ішінен ең үлкен ортақ бөлгішті алады. 1-мысалда ең үлкен ортақ бөлгіш 6-ға тең.

Ал ортақ айнымалыларының ішінен дәреже көрсеткіші ең кіші болатынын алады: a^2 , a көбейткіштері арасынан a -ны, ал b , b^2 b^3 көбейткіштері арасынан b -ні аламыз. Сонда ортақ көбейткіш $6ab$ түрінде жазылады.

2-мысал. $3x(2b-7) + 4b(7-2b)$ өрнегін көбейткіштерге жіктейік.

Шешуі. $7-2b = -(2b-7)$ болғандықтан,

$$\begin{aligned} 3x(2b-7) + 4b(7-2b) &= 3x \cdot (2b-7) - 4b(2b-7) = \\ &= (2b-7) \cdot (3x-4b) \end{aligned}$$

теңдігін аламыз.

3-мысал. $3x^2 - 1,2x = 0$ теңдеуін шешу қажет.

Шешуі. x ортақ көбейткішін жақша сыртына шығару арқылы берілген теңдеуді

$$x(3x - 1,2) = 0$$

түрінде жазамыз. Көбейтінді 0-ге тең болуы үшін көбейткіштердің кем дегенде біреуі 0-ге тең болуы керек, яғни $x = 0$ немесе $3x - 1,2 = 0$ болуы қажет, яғни $3x - 1,2 = 0$

$$3x = 1,2$$

$$x = 0,4.$$

Бұдан көбейтінді 0-ге тең болуы үшін $x = 0$ не $x = 0,4$ болуы қажет, яғни теңдеудің екі түбірі бар: 0 және 0,4.

Жауабы: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,4$.

4-мысал. $4^9 + 4^8 - 4^7$ қосындысы 19-ға бөлінетінін дәлелдейік.

Шешуі: $4^9 + 4^8 - 4^7 = 4^7(4^2 + 4 - 1) = 19 \cdot 4^7$.

$19 \cdot 4^7$ көбейтіндісі 19-ға бөлінеді, олай болса, $4^9 + 4^8 - 4^7$ қосындысы 19-ға бөлінеді.



Жақша сыртына шығаратын ортақ көбейткішті қалай анықтайды?

Жаттығулар

A

2.101. Көбейткіштерге жіктеп, нәтижесін тексеріңдер.

- | | | | |
|------------|----------------|-----------------|---------------|
| 1) $ax+ay$ | 2) $mx+nx$ | 3) $-xy+2x$ | 4) $-2ab-3a$ |
| 5) $ac+bc$ | 6) $-10xz+8yz$ | 7) $30a^2+15ab$ | 8) $8k^2+8kl$ |

2.102. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарыңдар.

- | | |
|---------------|----------------|
| 1) $4a+3a^2$ | 2) $-20m+30n$ |
| 3) $5a^2-15a$ | 4) $-6xy+9y^2$ |

- 5) $0,5x^3 - 2,5x$ 6) $8xy - 4y^2$
 7) $-m^2n^2 - mn$ 8) $18pq^3 - 9q^4$

2.103. Көбейтінді түріне келтіріңдер.

- 1) $4a^3b - 6a^2b^2$ 2) $5x^2y + 10xy^2$
 3) $14m^3n - 21m^2n^3$ 4) $5x^3 - 15x^2y + 20xy^2$
 5) $2a^2y - 6ay^2 + 8y$ 6) $6ax - 9a^2 + 15ax^2$

В

2.104. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарыңдар.

- 1) $3x^2 - 9x^2y + 6xy^2$ 2) $15a^2 - 25a^2b^2 - 10a^3$
 3) $6ab^2 - 9b^3 + 12b^4$ 4) $14m^2n - 21mn^2 - 35mn^3$
 5) $30pq^3 + 18p^2q^2 - 12p^3q$ 6) $8x^4y^3 - 12x^2y^2 + 16x^3y^2$

2.105. Көбейткіштерге жіктендер.

- 1) $a^3 + 5a^2 + a$ 2) $8b^2 - 4b^3 + 10b^4$
 3) $x^2 - 3x^3 - 4x^4$ 4) $15y^3 - 27y^2 + 9y$
 5) $6a^5 - 72a^4 - 48a^2$ 6) $-5mn^2 - 15m^2n - 20m^2n^2$

2.106. Көбейтінді түріне келтіріңдер.

- 1) $5a^4 + 10a^3b - 25a^2b^2 - 15ab^3$ 2) $2x^4 - 6x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3$
 3) $3x^4 + 6x^3y - 15x^2y^2 - 9x^2y$ 4) $-6bm^2 + 9m^3 - 12m^4 - 3b^2m^2$

2.107. Теңдеулерді шешіңдер.

- 1) $x^2 - 5x = 0$ 2) $y^2 + 6y = 0$ 3) $y^2 + 0,1y = 0$
 4) $x^2 + 2,5x = 0$ 5) $2x^2 - 3x = 0$ 6) $6x^2 - 0,5x = 0$
 7) $7x - 0,2x^2 = 0$ 8) $\frac{1}{4}x^2 + x = 0$

2.108. Өрнектердің мәнін табыңдар.

- 1) $5,27x - x^2$, мұндағы $x=4,27$
 2) $ay - a^2$, мұндағы $a=1,5$, $y=-8,5$
 3) $ab^2 + b^3$, мұндағы $a=8,7$, $b=1,3$
 4) $-xy - x^2$, мұндағы $x=-1,28$, $y=101,28$

С

2.109. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарыңдар.

- | | |
|--|---|
| 1) $4a^3b - 10a^2b^2 + 2ab^3$ | 2) $18x^3y + 21x^2y^2 - 3xy^3$ |
| 3) $8x^5y^2 - 12x^4y^2 + 12x^3y^2 - 4x^2y^2$ | 4) $-20x^2y^3z^2 - 35x^3y^2z^3 + 15x^3y^2z^2$ |
| 5) $16a^5b - 8a^4b^3 - 6a^3b^3 + 10a^2b^4$ | 6) $6a^4x^3 - 15a^3x^4 + 15a^2x^5 - 9ax^6$ |

2.110. Көпмүшелердің көбейтіндісі түріне келтіріңдер.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1) $2a(m+n) + b(m+n)$ | 2) $8(x-1) + (x-1)^2$ |
| 3) $3c(x-y) - 2d(x-y)$ | 4) $3ab(x+2y) + c^2(x+2y)$ |
| 5) $9a^2(x-2y) - b^2(x-2y) + (x-2y)^2$ | 6) $3a(2x-7) + 5b(2x-7) - (2x-7)^2$ |

2.111. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| 1) $5x(2a-3b) + 2y(2a-3b) + z(2a-3b)$ | 2) $7(c+2) + (c+2)^2 - b(c+2)$ |
| 3) $5xy^2(x^2-x+1) - 15x^2y(x^2-x+1)$ | 4) $2ab^2(3x+y) + 4a(3x+y)$ |

2.112. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарыңдар.

- | | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $(3x+6)^2$ | 2) $(7x-14)^2$ | 3) $(5m+30)^2$ | 4) $(2a-4b)^3$ |
| 5) $(3m-12n)^3$ | 6) $(2ab-4b^2)^2$ | 7) $(5x-15x^2)^3$ | 8) $(2xy+6x^2)^5$ |

Қайталауға арналған жаттығулар

2.113. Кәсіпкер 2 500 000 тг табыс тапты. Оның 12% -і салық төлеуге және 1,5% -і қайырымдылыққа жұмсалды. Кәсіпкерде қанша ақша қалды?

2.114. Марат 800 000 тг сыйақы алды. Оның 4% -ін салыққа төлесе, 7% -ін жинақ қорына салды. Маратта қанша ақша қалды?

2.115. 5 кг саңырауқұлақтың 80% -ін су құрайды. Оларды кептіргеннен кейін құрамындағы судың массасы 50% -ке дейін төмендеді. Кепкеннен кейінгі саңырауқұлақтардың массасы қандай?

2.116. 12 кг көгөністің құрамында 88% су бар. Кептіргеннен кейін көгөніс құрамында 70% су қалды. Кепкен көгөністердің массасын табыңдар.

- 2.117. Тұздық дайындау үшін қызанақтың 4 бөлігі және пияздың 1 бөлігі қажет болды. Егер 16 кг қызанақ болса, неше килограмм пияз қажет?
- 2.118. Өрік тосабын дайындау үшін өріктің 7 бөлігі және қанттың 2 бөлігі қажет. Егер 14 кг өрік алсақ, неше килограмм қант қажет?

2.5.2. Көпмүшені топтау тәсілімен көбейткіштерге жіктеу

$ac - bc + ad - bd$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік. Көпмүшенің барлық қосылғыштарының ортақ көбейткіштерін жақша сыртына шығару арқылы (2.3-б., 2.3.2) көбейткіштерге жіктеу мүмкін емес, себебі бұл қосылғыштардың барлығына ортақ көбейткіш жоқ. Мұндай жағдайда көпмүшенің ортақ көбейткіштері бар мүшелерін топтайды:

$$(ac - bc) + (ad - bd)$$

және әрбір топтағы ортақ көбейткіштерді жақша сыртына шығарады:

$$c(a - b) + d(a - b).$$

Алынған өрнекте $a - b$ екімүшесі ортақ көбейткіш болады. Сонда

$$c(a - b) + d(a - b) = (a - b)(c + d).$$

Сонымен,

$$ac - bc + ad - bd = (a - b)(c + d).$$

Көбейткіштерге жіктеудің бұл тәсілін **топтау тәсілі** деп атайды.

$ac - bc + ad - bd$ көпмүшесін топтауды өзге тәсілмен де орындауға болады: $ac - bc + ad - bd = (ac + ad) - (bc + bd) = a(c + d) - b(c + d) = (c + d)(a - b)$.

Қосылғыштарды былай топтағанда да: $(ac - bc) + (ad - bd)$ алдыңғыдай нәтиже шығады, яғни *нәтиже қосылғыштарды топтау тәсіліне тәуелді емес*. (Мұны өз беттеріңше тексеріп көріңдер.)

1-мысал. $x^2 - 6x + 5$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік.

Шешуі. $-6x$ мүшесін $-x - 5x$ түріне келтіріп, берілген көпмүшені былай топтаймыз:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= x^2 - x - 5x + 5 = (x^2 - x) - (5x - 5) = \\ &= x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5). \end{aligned}$$

2-мысал. $(x - 3)(x + 7) - 13 = (x + 8)(x - 4) - 2$ теңбе-теңдігін дәлелдейік.

Шешуі. Ол үшін теңбе-тең түрлендірулерді қолданады. Мұнда теңдіктің бір жақ бөлігін түрлендіру арқылы оны теңдіктің екінші жақ бөлігіне келтіреді немесе теңдіктің екі жақ бөліктерін де түрлендірулер

арқылы бірдей өрнектерге келтіреді. Берілген теңбе-теңдікті дәлелдеу үшін екінші тәсілді қолданамыз:

$$(x-3)(x+7)-13 = x^2 + 7x - 3x - 21 - 13 = x^2 + 4x - 34,$$

$$(x+8)(x-4)-2 = x^2 + 8x - 4x - 32 - 2 = x^2 + 4x - 34.$$

Берілген өрнектің оң жағы да, сол жағы да бір өрнекке тең болғандықтан, бұл өрнектер өзара теңбе-тең.

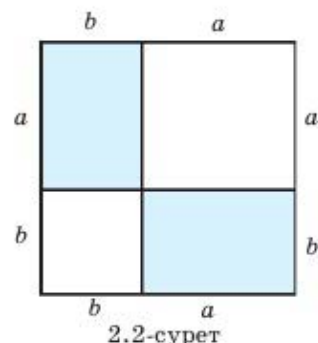


Қандай жағдайда көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеу үшін топтау тәсілін қолданады?



2.2-сурет бойынша:

- 1) боялмаған квадраттар мен боялған тіктөртбұрыштардың ауданын анықтап, оларды қосыңдар;
- 2) үлкен квадраттың ауданын анықтаңдар;
- 1) және 2)-тапсырмаларда анықталған өрнектерді теңестіріңдер және оны жазып көрсетіңдер.



2.2-сурет

Жаттығулар

А

2.119. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) $2a(x+y) + x+y$
- 2) $3b(x-y) + x-y$
- 3) $4a(m-n) + m-n$
- 4) $x(p-q) + p-q$
- 5) $5a(x+y) - x-y$
- 6) $4a(m-n) - m+n$

2.120. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) $ax+ay+bx+by$
- 2) $ax-ay+bx-by$
- 3) $a^2+ab+ac+bc$
- 4) $ax+ay+6x+6y$
- 5) $1-bx-x+b$
- 6) $ab+2b-2a-4$
- 7) $x^2+xy+ax+ay$
- 8) $am-an+m-n$
- 9) $3x-3y+ax-ay$
- 10) $ab-a^2+2a-2b$

2.121. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) x^3+3x^2+3x+9
- 2) $x^2-xy-2x+2y$

3) $m^2 + mn - 5m - 5n$

4) $a^2 - ab - 3a + 3b$

5) $10ay - 5by + 2ax - bx$

6) $6by - 15bx - 4ay + 10ax$

7) $5x^2 - 5ax - 7a + 7x$

8) $4x^2 - 4xz - 3x + 3z$

9) $5ax - 6bx - 5ay + 6by$

10) $2m^2 - mn + 2mx - nx$

2.122. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

1) $x(y - a) + a(x + y) = y(x + a)$

2) $x(y - 2) + 2(x + y) = y(x + 2)$

3) $m(m - n) + 2mn = m(m + n)$

4) $x(1 - x) + x(x^2 - 1) = x^2(x - 1)$

2.123. Өрнектердің мәнін табыңдар.

1) $(x - 4)(x - 2) - (x - 1)(x - 3)$, мұндағы $x = 1\frac{3}{4}$

2) $(a - 5)(a - 1) - (a + 2)(a - 3)$, мұндағы $a = -2\frac{3}{5}$

3) $(x - 2)(x - 3) + (x + 6)(x - 5) - 2(x^2 - 7x + 13)$, мұндағы $x = 5,6$

4) $(3m - 1)(m + 1) + (2m - 1)(m - 1) - (5m + 5)(m - 2)$,
мұндағы $m = 0,375$

2.124. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b$

2) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + a + b$

3) $ax^2 + bx^2 + ax - cx^2 + bx - cx$

4) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx$

2.125. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $ac^2 - ad + c^3 - cd - bc^2 + bd$

2) $mx^2 + my^2 - nx^2 - ny^2 + n - m$

3) $bm^2 + cm^2 - bn + bn^2 - cn + cn^2$

4) $xy^2 - ny^2 - mx + mn + m^2x - m^2n$

5) $a^2b + a + ab^2 + b + 2ab + 2$

6) $x^2 - xy + x - xy^2 + y^3 - y^2$

2.126. Өрнектердің мәнін табыңдар.

1) $a^2 + ab - 5a - 5b$, мұндағы $a = 6\frac{3}{5}$, $b = \frac{2}{5}$

2) $x^2 - xy - 3x + 3y$, мұндағы $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$

3) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$, мұндағы $a = 4$, $x = -3$

2.127. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$1) (x-5)(x+8)-(x+4)(x-1)=-36 \quad 2) x^4-(x^2-1)(x^2+1)=1$$

$$3) x^4-(x^2-7)(x^2+7)=49 \quad 4) (x-3)(x+7)-(x+5)(x-1)=-16$$

2.128. $(n-6)(n+8)-2(n-25)$ өрнегі кез келген n үшін оң мәндер қабылдайтынын көрсетіңдер.

2.129. n -нің барлық бүтін мәндерінде берілген өрнектер 6-ға бөлінетінін көрсетіңдер.

$$1) n(n-1)-(n+3)(n+2) \quad 2) n(n+5)-(n-3)(n+2)$$

C

2.130. Екі тақ санның: 1) қосындысы жұп; 2) көбейтіндісі тақ болатынын дәлелдеңдер.

2.131. Үшмүшелерді көбейткіштерге жіктеңдер.

$$1) x^2+5x+6 \quad 2) x^2-5x+6 \quad 7) x^2-x-6$$

$$3) x^2-8x+15 \quad 4) x^2-7x+12 \quad 8) x^2+2x-15$$

$$5) x^2-x-12 \quad 6) x^2-3x-4$$

2.132. Тіктөртбұрыштың ұзындығы енінен 3 есе үлкен. Егер оның енін 4 метрге ұзартып, ал ұзындығын 5 м қысқартсақ, онда тіктөртбұрыштың ауданы 15 м²-ге артады. Тіктөртбұрыштың өлшемдерін табыңдар.

2.133. Теңдеулердің оң жақ бөлігін көбейткіштерге жіктеп алып, шешіңдер.

$$1) x^2-4x-5=0 \quad 2) x^2+7x+12=0$$

$$3) x^2-11x+10=0 \quad 4) 2x^2-3x+1=0$$

Көмек. $x^2-4x-5=0$ теңдеуін шешейік.

$$x^2-5x+x-5=0$$

$$(x^2+x)-(5x+5)=0$$

$$x(x+1)-5(x+1)=0$$

$$(x-5)(x+1)=0$$

$$x-5=0 \text{ және } x+1=0$$

$$x=5 \text{ және } x=-1$$

Жауабы: $x_1=5$, $x_2=-1$.

- 2.134. Бүтін санның квадратынан осы санның өзін азайтқанда жұп сан шығатынын көрсетіңдер.
- 2.135. Егер $b+c=10$ болса, онда $(10a+b) \cdot (10a+c) = 100a \cdot (a+1) + bc$ теңбе-теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер. Осы формуланы пайдаланып, берілген өрнектердің мәнін есептеңдер.
- 1) $24 \cdot 26$ 2) $37 \cdot 33$ 3) $42 \cdot 48$ 4) $81 \cdot 89$

Қайталауға арналған жаттығулар

- 2.136. Берілген үш таңбалы санның сол жағына 5 цифрын тіркеп жазып, шыққан төрт таңбалы саннан 3032-ні азайтқандағы айырманың мәні берілген үш таңбалы саннан 9 есе үлкен болды. Осы үш таңбалы санды табыңдар.
- 2.137. m -нің қандай мәнінде $\frac{3m+2}{4}$ бөлшегінің мәні $\frac{5m-1}{3}$ бөлшегінің мәнінен 1-ге кем болады?
- 2.138. (Көне қытай есебі.) Тор ішінде қояндар мен қырғауылдар жүр. Олардың барлығын қосқанда, аяқ саны 100 және бас саны 36 болды. Тор ішінде неше қоян және неше қырғауыл жүр?
- 2.139. Өрнектердің мәнін табыңдар.
- 1) $(3a - 2b)(3a^3 + 2b^2)$, мұндағы $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$
- 2) $3a^2 + 7ab + 2b^2$, мұндағы $a = 2$, $b = -1$
- 2.140. Моторлы қайық ағыс жылдамдығы 3 км/сағ болатын өзенмен жүзіп, бірінші бекеттен екінші бекетке 4 сағатта барып қайтты. Егер моторлы қайық тұнық суда 18 км/сағ жылдамдықпен жүзе алатын болса, онда екі бекеттің арақашықтығын есептеп табыңдар.

**«Бірмүшелер мен көпмүшелер»
бөлімі бойынша тест тапсырмалары**

1. $x = -1$ деп алып, $x^2 - 6x - 7$ көпмүшесінің мәнін есептеңдер.
A) 0 B) 1 C) -1 D) -2
2. Бірмүшені стандарт түрде жазыңдар: $5^2pq^2(-4)^2qp$.
A) $5^2 \cdot 4^2p^2q^2$ B) $4^2 \cdot 5^2p^2q^3$ C) $400p^2q^3$ D) $-400p^2q^2$
3. Қабырғалары $\frac{3}{7}x$ және $14y$ -ке тең тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.
A) $2xy$ B) $3xy$ C) $4xy$ D) $6xy$
4. $\frac{1}{125}x^9y^{12}$ бірімүшесін басқа бірімүшенің кубы түрінде жазыңдар.
A) $\left(\frac{1}{25}x^4y^3\right)^3$ B) $\left(\frac{1}{5}x^4y^3\right)^3$ C) $\left(\frac{1}{25}x^3y^4\right)^3$ D) $\left(\frac{1}{5}x^3y^4\right)^3$
5. Өрнекті ықшамдаңдар: $(2x - 5y)(4x + 3y) - (x + 2y)(5x - 6y)$.
A) $3x^2 + 18xy - 27y^2$ B) $3x^2 - 18xy - 3y^2$
C) $3x^2 - 16xy - 3y^2$ D) $3x^2 - 18xy - 27y^2$
6. $-3x(2x + y) - 4y(3x - 2y)$ өрнегін ықшамдап, $x = -0,1$ және $y = 0,2$ болғандағы мәнін табыңдар.
A) -0,26 B) 0,46 C) 0,56 D) 0,36
7. Теңдеуді шешіңдер: $\frac{2x+1}{3} - \frac{5x-2}{4} = 1$.
A) 3,5 B) $\frac{2}{7}$ C) $-\frac{2}{7}$ D) -3,5
8. Көбейткіштерге жіктеңдер: $a(m + n) + b(n + m)$.
A) $(m + n)(a + b)$ B) $(n - m)(a - b)$
C) $(a + b)(m - n)$ D) $(a - b)(m - n)$
9. Көбейткіштерге жіктеңдер: $3(x + y)(x - y) - (x + y)^2$.
A) $2(x + y)(x - y)$ B) $(x + y)(4x - 4y)$
C) $2(x + y)(x - 2y)$ D) $(x + y)(2x - 3y)$

3. ФУНКЦИЯ

3.1. Функция және оның берілу тәсілдері

3.1.1. Функция ұғымы

1-мысал. Автомобиль 60 км/сағ тұрақты жылдамдықпен жүріп келеді. Оның t уақытта жүріп өтетін s км жолын табу керек.

Шешуі. Жүрілген s жол t уақыт пен v жылдамдық арқылы былай өрнектеледі:

$$s = vt.$$

Мұнда $v = 60$ км/сағ болғандықтан, жүрілген жолды

$$s = 60t$$

өрнегі арқылы есептейміз. Осыдан t уақыты өзгерген сайын жүрілетін s жолы да өзгередінін көреміз. Мысалы, $t = 0,5$ сағ болса, онда $s = 60 \cdot 0,5 = 30$ км; егер $t = 2$ сағ болса, онда $s = 120$ км, т.с.с.

2-мысал. Әкімшілік тұрғындарға саяжайға арналған әрқайсысының ауданы 6 сотық (600 м^2) болатын тіктөртбұрыш пішінді жер телімдерін бөліп бермекші болады. Егер бөлінетін жер телімінің бір өлшемі x метр болса, онда оның екінші өлшемі y -ті қалай анықтауға болады?

Шешуі. Тіктөртбұрыштың ауданын анықтау формуласы бойынша $600 = x \cdot y$ теңдігі орындалуы керек. Осыдан

$$y = \frac{600}{x}$$

өрнегін аламыз. Мұндағы x пен y -ті айнымалылар деп қарастырсақ, онда x -тің әрбір мәніне y -тің тек бір ғана мәні сәйкес келеді. Мысалы,

- егер $x = 6$ м болса, онда $y = \frac{600}{6} = 100$ (м);
- егер $x = 15$ м болса, онда $y = \frac{600}{15} = 40$ (м);
- егер $x = 20$ м болса, онда $y = \frac{600}{20} = 30$ (м).

Қарастырған мысалдарда бір айнымалы (тәуелсіз айнымалы) өзгерсе, онда екінші айнымалы да (тәуелді айнымалы) өзгеріп отыратынын көрдік. Сонымен қатар тәуелсіз айнымалының әрбір мәніне тәуелді айнымалының тек бір мәні сәйкес келетіні анықталды.

Анықтама. Тәуелсіз айнымалының әрбір мүмкін мәніне тәуелді айнымалының бір ғана мәні сәйкес келетін тәуелділікті **функционалды тәуелділік** немесе **функция** деп атайды.

Тәуелсіз айнымалы x -ті **аргумент** деп, ал y -ті x аргументіне тәуелді **функция** деп атайды (x өзгергенде ол да өзгереді).

Жалпы түрде x аргументіне тәуелді y функциясын былай жазады: $y = f(x)$, оқылуы «**игрек тең икстен эф**».

Сонымен, функцияны анықтау (беру) үшін:

- 1) функционалды тәуелділікті орнататын f заңдылығы (x -тің әрбір мәніне y -тің бір ғана мәні сәйкес келеді) берілуі керек;
- 2) аргументтің (x -тің) мүмкін мәндері жиыны көрсетілуі қажет.

Анықтама. Аргументтің (x) қабылдайтын барлық мәндері жиынын **функцияның анықталу облысы** деп атайды.

Мысалы, $f(x) = 2x - 3$, $x \in [-1; 2]$ және $f(x) = 2x - 3$, $x \in [0; 5]$ әртүрлі функциялар, өйткені олардың анықталу облыстары өзгеше.

Көбінесе функционалды тәуелділіктердің анықталу облысы көрсетілмей жазыла береді. Мұндай жағдайда оның анықталу облысы ретінде $f(x)$ өрнегінің мағынасы бар болатындай x -тің барлық *мәндері жиыны* алынады.

3-мысал. $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ функциясының анықталу облысын табайық.

Шешуі. Айнымалының қандай мәнінде $\frac{2x}{x-1}$ өрнегінің мәні болатынын анықтайық. Бұл функцияның анықталу облысы $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ теңсіздігімен анықталады, өйткені бөлшектің бөлімі нөлге тең болмауы керек. Демек, функцияның анықталу облысы 1-ден басқа барлық нақты сандар. Оны аралықтармен былай жазады: $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

4-мысал. $y = 3x - 2$ функциясының мәндері жиынын табу керек, егер $-3 \leq x \leq 3$.

Шешуі. $-3 \leq x \leq 3$ аралығында осы функция қандай мәндер қабылдайтынын анықтайық.

Теңсіздіктің екі жағын да 3-ке көбейтеміз: $-9 \leq 3x \leq 9$. Енді $y = 3x - 2$ функциясын алу үшін теңсіздіктің екі жағынан 2-ні азайтамыз: $-11 \leq 3x - 2 \leq 7 \Rightarrow -11 \leq y \leq 7$.

Сонымен, жауабы: функция -11 мен 7 аралығындағы кез келген санды қабылдайды. Оны былай жазамыз: $[-11; 7]$.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының барлық қабылдайтын мәндері жиынын **функцияның мәндері облысы** деп атайды.

5-мысал. Аргументтің қандай мәнінде $f(x) = \frac{3}{x+3}$ функциясының мәні 6-ға тең?

Шешуі. 1) $f(x)$ мәні 6-ға тең болуы керек. Теңдеу құрамыз:

$$6 = \frac{3}{x+3}$$

$$6(x+3) = 3$$

$$6x + 18 = 3$$

$$6x = -15$$

$$x = -2,5, \text{ яғни } f(-2,5) = 6.$$

2) Жауабын тексеру үшін $x = -2,5$ мәнін берілген функцияға қоямыз:

$$f(-2,5) = \frac{3}{-2,5+3}. \text{ Сонда } f(-2,5) = 6.$$

Жауабы: $x = -2,5$ болғанда, функцияның мәні 6-ға тең.

Мұнда қарастырылған барлық мысалдарда функционалдық тәуелділік формула арқылы берілген. Бұл жағдайда **функцияны аналитикалық жолмен** берілді деп есептейді. Сонымен қатар **функция кестелік және графиктік** тәсілдермен де беріледі.



1. Қандай тәуелділікті функционалды тәуелділік деп атайды?
2. Тәуелді және тәуелсіз айнымалылар деп нені түсінесіңдер? Олардың қайсысын аргумент деп, ал қайсысын функция деп атайды?
3. Функцияның анықталу облысы деген не? Ал функцияның мәндері облысы деп нені түсінесіңдер?
4. Қандай шарттар орындалғанда функцияны толық берілді деп есептейміз? Мысал келтіріңдер.
5. Егер арнайы көрсетілмесе, функцияның анықталу облысы ретінде қандай жиынды алады?



Велосипедші сағат 15.00-де орнынан қозғалды және 15 секундта 100 м жүріп, жылдамдығын 5 м/с-ке жеткізді. Әрі қарай осы тұрақты жылдамдықпен жүріп отырды.

1) Велосипедшінің жүріп өткен жолы s метрді t секунд уақытқа тәуелді функция ретінде жазыңдар және бұл функцияның анықталу облысын көрсетіңдер.

2) Велосипедші: а) уақыт 15 сағ 15 мин 15 секундта; ә) жол жүргеніне 1 сағ болғанда қандай жол жүріп өтеді?

3) Велосипедші: а) қанша уақытта 1 км 100 м жолды; ә) сағат қандай уақыт көрсеткенде 5 км жол жүріп өтеді?



Г. Лейбниц



«Функция» термині латынның *functio* (орындау, атқару) сөзінен алынған. Бұл терминді тұңғыш рет 1694 жылы неміс математигі Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) енгізген.

Жаттығулар

А

- 3.1. $f(x) = 2x - 5$ функциясының мәндерін $x = -2; -1; 0; 1; 2$ болғанда анықтаңдар.
- 3.2. $f(x) = 2x - 5$ функциясының мәні аргументтің қандай мәнінде: 1) 3; 2) -1 ; 3) 0; 4) 10-ға тең?
- 3.3. Функцияның $y = f(x)$ түріндегі жалпы белгілеуін қолданып, келесі тұжырымдарды функционалды тәуелділік түрінде жазыңдар: 1) аргумент 3-ке тең болғанда функцияның мәні 10-ға тең; 2) функцияның мәні 5,5-ке тең болғанда аргумент 1,5-ке тең; 3) $x = -1$ және $x = 2$ болғанда функцияның мәндері өзара тең.
- 3.4. $x = 1$ болғанда $f(x) = 1,2x + 3,8$ функциясының мәні: 1) 3-ке; 2) 4-ке; 3) 5-ке; 4) 6-ға тең болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 3.5. Функцияның анықталу облысын сан жиыны арқылы жазып көрсетіңдер.
- 1) $f(x) = 0,5x + 4, \quad 0 \leq x \leq 3$ 2) $f(x) = 0,3x - 2, \quad -2 \leq x \leq 1$
- 3) $f(x) = 4 - x, \quad -2 \leq x$ 4) $f(x) = \frac{x+1}{4}, \quad x \leq 3$.
- 3.6. $y = f(x)$ функциясы үшін $f(-1); f(0); f(1); f(2)$ мәнін табыңдар.
- 1) $f(x) = 4 - 0,5x$ 2) $f(x) = 3x - 2$
- 3) $f(x) = x^2 + 1$ 4) $f(x) = \frac{3}{x+5}$.
- 3.7. $f(x) = 2x - 3$ функциясы берілген. Кестені толтырыңдар.

x	0	-1		-2			5
$f(x)$			2		4,5	7	

- 3.8. Тіктөртбұрыштың бір өлшемі 3 см, ал екінші өлшемі x см. Оның ауданы S -ті x -ке тәуелді функция түрінде жазыңдар:
- 1) $S = 13,5 \text{ см}^2$ болуы үшін x -тің мәні қандай болуы керек?
- 2) $x = 5,7 \text{ см}$ болғанда S -тің мәні қандай болуы қажет?

В

- 3.9. Төмендегі заңдылықпен анықталатын сәйкестік функционалды тәуелділік бола ма? Болса, формула арқылы жазып көрсетіңдер.
- 1) Қабырғасы x см болатын әрбір квадратқа оның ауданы $S(x)$ сәйкес келеді.

2) Оператор 7 сағаттық жұмыс уақытында 300 беттік шығарманың 30 бетін теріп үлгереді. Мұнда өткен x сағатына әлі терілмеген y беті сәйкес келеді.

- 3.10. Сыйымдылығы 200 л болатын бакқа 2 л/с жылдамдықпен бензин құйылды. 1) t секунд өткен соң бакта қалатын бос орын мөлшері – V -ні t -ға тәуелді функция түрінде жазыңдар. 2) $V(t)$ функциясының анықталу облысы қандай? 3) $V(10)$, $V(30)$ мәндерін табыңдар. 4) $V(120)$ мәнін анықтау мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

- 3.11. 1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; 2) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ функциясы үшін $f(-1)$; $f(0,1)$; $f(0,25)$; $f(1)$ және $f(2)$ мәндерін табыңдар. Функцияның анықталу облысы қандай?

- 3.12. 1) $f(x) = 2x - 7$, $-1 \leq x \leq 1$; 2) $f(x) = 2x - 7$, $0 \leq x \leq 5$, функциясының мәні 1-ге тең болуы мүмкін бе? Мүмкін болса, сәйкес аргументтің мәні қандай? Жауаптарыңды негіздеңдер.

- 3.13. Аргументтің қандай мәнінде функцияның мәні 4-ке тең?

$$1) f(x) = \frac{6}{x-2}$$

$$2) f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$3) f(x) = \frac{3}{x} + 3$$

$$4) f(x) = \frac{x}{x-2} + 5$$

- 3.14. $f(x) = x^2 - 5$ функциясы берілген. Аргументтің көрсетілген мәндерінде функцияның мәндерін салыстырыңдар.

$$1) f\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ және } f(0,5)$$

$$2) f(0) \text{ және } f(-2)$$

$$3) f(-2) \text{ және } f(1)$$

$$4) f(-3) \text{ және } f(4)$$

- 3.15. Функцияның анықталу облысын жиын арқылы жазыңдар.

$$1) f(x) = \frac{3x+4}{2x-3}$$

$$2) f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$$

$$3) f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$$

С

- 3.16. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

$$1) f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3}$$

$$2) f(x) = \frac{2x+1}{(x-1) \cdot (x+4)}$$

3.17. Егер аргумент -2 -ден кем емес және 7 -ден артық емес мән қабылдайтыны белгілі болса, онда $y = f(x)$ функциясының анықталу облысы қандай?

$$1) f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$2) f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$$

3.18*. $y = \frac{2}{x-3} + 4$. функциясы берілген. 1) Функцияның анықталу облысын табыңдар; 2) берілген функционалды тәуелділік өрнегінен x айнымалысын y арқылы өрнектеп жазыңдар; 3) алынған нәтиже бойынша y айнымалысының барлық мүмкін мәндері жиынын табыңдар. Бұл табылған жиынды берілген функцияның мәндері облысы деп қарастыруға бола ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.

3.19*. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ функциясы берілген. 1) функцияның анықталу облысын табыңдар; 2) $f(-10)$; $f(-3)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(10)$ мәндерін анықтап, оларды салыстырыңдар; 3) функцияның ең үлкен мәні қандай? 4) Функция мәні 0 -ге тең немесе теріс болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер. Функцияның мәндері облысын жиын арқылы жазып көрсетіңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.20. Амалдарды орындандар.

$$1) (4x^2)^3$$

$$3) 0,3v^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}u^4 \cdot v^6\right)$$

$$2) (-2a^4b^2)^3$$

$$4) \left(\frac{1}{4}x^2y\right)^3 \cdot (-32x^2 \cdot b)$$

3.21. Натурал санның 5 -дәрежесі қандай цифрмен аяқталады? Жауаптарыңды негіздеңдер.

3.22. Көпмүшені көбейткіштерге жіктендер.

$$1) a^2c + b^2c - a^2d - b^2d + d - c$$

$$2) x^2 + 7x + 10$$

3.23. Тіктөртбұрыштың ені ұзындығынан 2 есе кем. Егер оның енін 2 см ұзартып, ал ұзындығын 2 см-ге қысқартсақ, нәтижесінде алынатын тіктөртбұрыштың ауданы берілген тіктөртбұрыш ауданынан 2 см² артық болады. Берілген тіктөртбұрыштың өлшемдерін анықтаңдар.

3.1.2. Функцияның кестелік және графиктік тәсілдермен берілуі

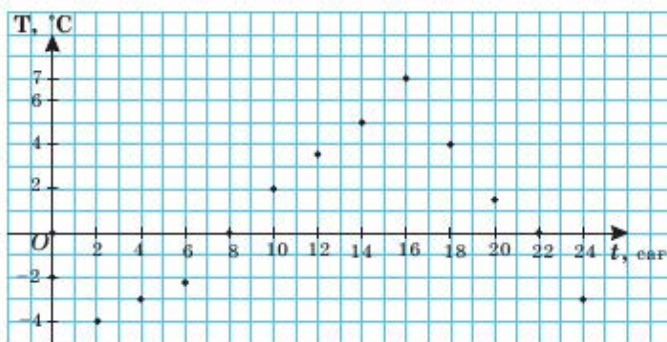
Күнделікті тұрмыс-тіршілікте, ғылым мен техникада түрлі кестелер түрінде берілген мәліметтер жиі қолданылады.

1-мысал. Тәулік бойы әрбір 2 сағ өткенде ауа температурасы T -ні өлшеп, оның нәтижесін кестеге толтырсақ, онда t уақытына тәуелді келесі мәліметті аламыз:

t , сағ	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
T , °C	-2	-4	-3	-2,5	0	2	3,5	5	7	4	1,5	0	-3

Бұл кестеде уақыттың әрбір мәніне температураның жалғыз мәні сәйкес келеді. Онда T ауа температурасын t уақытына тәуелді функция ретінде қарастыруға болады: $f(t) = T$. Сонымен, мұнда $f(t) = T$ функциясы кесте арқылы берілген. Мысалы, осы кестеден $f(10) = 2^\circ\text{C}$, $f(4) = -3^\circ\text{C}$ және $f(24) = -3^\circ\text{C}$ болатыны шығады. Бұл жағдайда **функцияны кестемен берілді** деп есептейді.

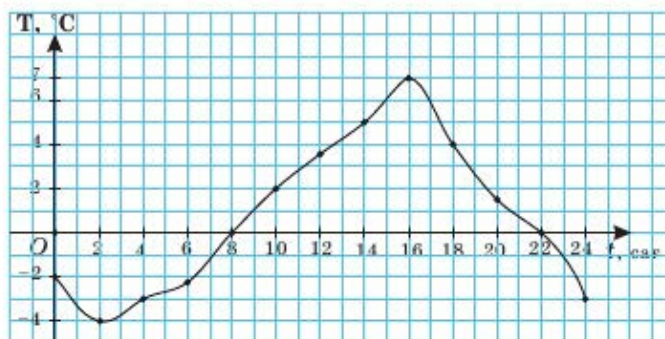
Кестенің әрбір бағанында орналасқан сәйкес сандарды координаталық жазықтықтың нүктелері ретінде қарастыруға болады. Атап айтқанда, әр бағандағы жоғарғы сан – нүктенің абсциссасы, ал төменгі сан – нүктенің ординатасы деп алсақ, онда 3.1-суретте көрсетілгендей нүктелер тізбесін аламыз.



3.1-сурет

Егер кестедегі дерек әрбір сағат сайын өлшенген мәліметтер болса, онда көрсетілген нүктелер тізбесі екі есе жиі салынар еді. Нәтижесінде бұл нүктелерді біркелкі сызықпен қосып, *ауа температурасының тәулік бойы өзгерістері графикін* аламыз (3.2-сурет).

Мұндай жағдайда **функцияны графиктік тәсілмен берілді** деп есептейді.



3.2-сурет

Анықтама. Функцияның графигі деп координаталық жазықтықта абсциссалары аргументтің мәніне тең, ал ординаталары функцияның сәйкес мәндеріне тең нүктелер жиынын айтады.

Сонымен, $y = f(x)$ функциясының графигі деп жазықтықтағы барлық $M(x; f(x))$ нүктелері жиынын айтады.

$y = f(x)$ функциясының графигін салу үшін аргументтің бірнеше мәнін алып, оларға сәйкес келетін функция мәндерімен кесте құрады. Осы кестеде көрсетілген нүктелерді Oxy жазықтығында бейнелеп, оларды біркелкі тұтас сызықпен қосады. Бұл нүктелер неғұрлым жиі орналасса, график соғұрлым дәлірек салынады.

Іс жүзінде функцияның графиктік тәсілмен берілуі жиі қолданылады. Мысалы, сейсмологияда сейсмограф аспабы жер қабаты тербелісін үнемі жазып отырады. Осы жазулардың көмегімен Жер шарының қай тұсында неше балдық жер сілкінісі болғанын анықтайды. Медицинада қолданылатын электрокардиограф аспабы да жүрек жұмысының нәтижесін графикалық түрде кескіндейді.



2-мысал. $y = 0,5x^2 - 2x$, $0 \leq x \leq 5$ функциясы графигін салу керек.

Шешуі: функцияның анықталу облысы $[0; 5]$. Осы аралықта функция мәндерінен кесте құрамыз.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	-1,5	-2	-1,5	0	2,5

Табылған нүктелерді координаталық жазықтыққа салып, оларды біркелкі тұтас сызықпен қосып, берілген функцияның графигін аламыз (3.3-сурет).

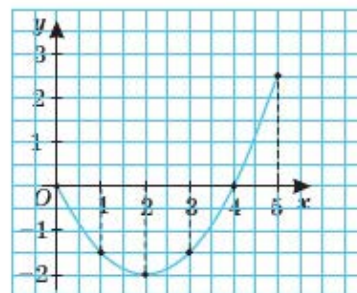


1. Кестемен берілген функцияға мысал келтіріңдер.
2. Функцияның графигі деп нені айтады?
3. Функция графигін қалай салуға болады?
4. Функция графигі бойынша көрсетілген аргументке сәйкес келетін функцияның мәнін қалай анықтайды? Мысал келтіріңдер.



Дөңес n бұрыш пен оның барлық диагональдарының саны m арасындағы тәуелділікті анықтаңдар. Ол үшін:

- 1) дөңес төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш және жетібұрыш салып, оның барлық диагональдарының санын есептеңдер; 2) Есептеу нәтижесін төмендегі кестеге жазыңдар.



3.3-сурет

n	3	4	5	6	7	8	9
m	0	2					

Мұнда үшбұрыштың диагональы болмайтыны ескерілген.

3) Осы кестедегі алғашқы толтырылған 5 мән бойынша диагональдар санының оның төбелері санына тәуелді өзгеру заңдылығын анықтаңдар.

Содан соң $n = 8$ және $n = 9$ болғандағы көпбұрыш диагональдарының санын сызбасын салмай-ақ табыңдар.

4) Табылған заңдылыққа сүйеніп, $m = f(n)$ функциясын жазыңдар.

5) $m = y$ және $n = x$ деп алып, $y = f(x)$ функциясы графигін координаталық жазықтықта салыңдар. Мұндағы $x \geq 3$.

(Тапсырманы топтасып орындаған тиімді.)

Жаттығулар

А

3.24. Функцияларды кесте түрінде беріңдер.

1) $y = 2x - 3$, $-1 \leq x \leq 4$

2) $y = \frac{1}{3}x + 2$, $-3 \leq x \leq 3$

3.25. Кестеде қадамы 1 мин болатын аралықпен электр самаурының қайнау уақыты көрсетілген.

t , мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T , °C	25	31	38	44	50	56	62	68	76	84	92	100	100

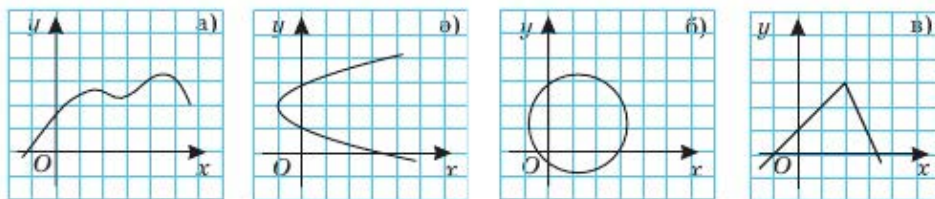
- 1) Самаурин неше минутта қайнады?

- 2) Самаурынға құйылған судың температурасы қандай?
- 3) Құйылған судың 5 мин өткендегі температурасы қандай?
- 4) Ордината өсінің әрбір сантиметрі 10°C -қа тең деп, ал абсцисса өсінде 1 см 1 минутқа тең деп алып, көрсетілген мәліметтерді координаталық жазықтықта бейнелеңдер.

3.26. $f(x) = 2x - 4$ функциясы үшін кестедегі бос орынды толтырыңдар.

x	-2	-1		1	2		4
$f(x)$			-4			2	

- 1) x -тің қандай мәнінде функция -4 -ке, 0 -ге, 4 -ке тең?
- 2) Функция мәні 3 -ке тең болуы мүмкін бе? Мүмкін болса, бұл мән x -тің қандай мәнінде орындалады?
- 3) Кесте бойынша функция графигін салыңдар.



3.4-сурет

- 3.27. 3.4-суретте көрсетілген графиктердің қайсысы функцияны анықтайды? Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 3.28. $y = 2x(2 - x)$ функциясы $D = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ жиынында анықталған. Оны кесте арқылы беріңдер. x -тің қандай мәнінде функция ең үлкен мән қабылдайды?

В

3.29. $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары кестемен берілген.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	7	5	3	1	-1	-3

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	0	1	4	9	16	25

- 1) $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ болса, $\varphi(3)$, $\varphi(1)$ -ді табыңдар.
- 2) $r(x) = f(x) \cdot g(x)$ болса, $r(2)$ мен $r(4)$ -ті табыңдар.

3.30. Қалааралық автобус тұрақты 80 км/сағ жылдамдықпен жүріп келеді. Автобустың t сағатта жүрген жолын s км деп алып, келесі кестені толтырыңдар.

t	15 мин	30 мин		1 сағ 20 мин		2 сағ
s			80 км		120 км	

3.31. Көрсетілген аралықта берілген қадамға сәйкес функцияны кестемен беріңдер және анықталған мәліметтер бойынша көрсетілген аралықта оның графигін салыңдар.

1) $y = \frac{2}{x}$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$, қадамы $h = \frac{1}{2}$

2) $y = \frac{x+1}{x-5}$, $0 \leq x \leq 4$, қадамы $h = \frac{1}{2}$

3.32. Катердің тұнық судағы жылдамдығы 30 км/сағ. Кестеде катердің өзен ағысымен t сағат жүзгендегі мәліметтері жазылған.

t , сағ	0,5	1		2	2,5	3
s , км	16,5		49,5	66		

1) Кестені толтырыңдар.

2) Өзен ағысы жылдамдығын табыңдар.

3) Кестемен анықталатын $s = f(t)$ функциясын формуламен беріңдер.

4) Ox өсінде 1 см 0,5 сағатқа, ал Oy өсінде 1 см 20 км-ге тең деп алып, функцияның графигін салыңдар.

C

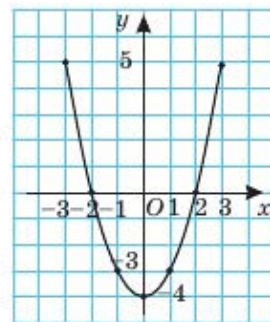
3.33. $y = f(x)$ функциясы кестемен берілген.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0	-0,75	-1	-0,75	0	1,25	3

1) x -тің қандай мәнінде функция ең кіші (үлкен) мәнін қабылдайды?

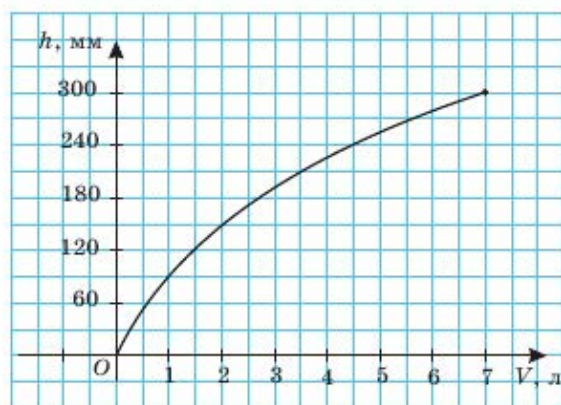
2) Функционалды тәуелділік заңдылығын анықтап, $f(-2)$ және $f(3)$ мәндерін табыңдар.

3.34. 3.5-суретте функция графикпен берілген. Оны кестемен беріңдер және $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$ мәндерін анықтаңдар. Жауаптарыңды негіздеңдер.



3.5-сурет

3.35. Қиық конус пішінді шелекке V литр су құйғанда, ондағы су деңгейі h мм биіктікке көтеріледі. 3.6-суретте құйылған судың h деңгейі (биіктігі) су көлемі V -ға тәуелді функция ретінде графикпен берілген.



3.6-сурет

- 1) Шелекке 1 л; 3 л; 5,5 л су құйса, су деңгейі неше миллиметр биіктікке көтеріледі?
 - 2) Шелектегі су деңгейінің биіктігі 120 мм, 200 мм болса, онда мұндағы су көлемі шамамен қандай?
 - 3) Егер шелектегі су көлемі 0,5 литрден 3 литрге дейін артса, онда су деңгейінің биіктігі неше миллиметрге көтеріледі?
 - 4) Шелектің сыйымдылығын анықтаңдар.
- 3.36. Өзен ағысымен меншікті жылдамдығы 20 км/сағ болатын моторлы қайық және оған қарсы бағытта меншікті жылдамдығы 30 км/сағ болатын катер жүзіп келеді. Алғашында олардың арақашықтығы 20000 м болған және өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ. Олардың арақашықтығы s метрді t минут уақытқа тәуелді функция деп алып, кестені толтырыңдар.

t , мин	10	20	30	40	50	60	70	80	90
s , м									

- 1) Есепте артық берілген мәлімет бар ма?
- 2) Кесте бойынша $s = f(t)$ функциясы графигін салыңдар. Мұнда Ox өсінің 1 см кесіндісі 10 мин, ал Oy өсінің 1 см кесіндісі 2000 метрге тең деп алыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

- 3.37. x -тің қандай мәнінде $\frac{6}{|x-5|}$ бөлшегінің мәні 3-ке тең?
- 3.38. 20 км/сағ жылдамдығын м/с есебімен өрнектеңдер.

3.39. Бөлшектерді ықшамдандар.

$$1) \left(\frac{1}{36}\right)^{-n} : 6^{2n-1} \quad 2) \frac{40^{n+1}}{2^{3n+1} \cdot 5^n}$$

3.2. Сызықтық функция және оның графигі

3.2.1. $y = kx$ функциясы және оның графигі

Дүкеннен бағасы 260 тг болатын x кг қант сатып алынды. Оған төленетін y теңге мөлшері былай анықталады: $y = 260 \cdot x$ (тг).

Сол сияқты, 20 литрлік канистрлермен x литр жанармай алынды. 1 л жанармайдың массасы 0,9 кг. Алынған жанармайдың салмағы y былай анықталады: $y = 0,9 \cdot x$ (кг).

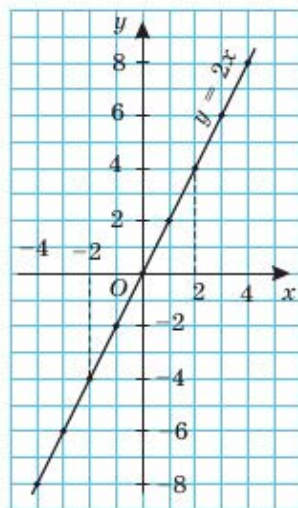
Бұл мысалдардың нәтижесінде:

$$y = kx$$

түріндегі функция алынды. Оны **тура пропорционалдық функциясы** деп атайды. Мұнда k – тұрақты сан, ол **пропорционалдық коэффициент** деп аталады. $k \cdot x$ өрнегі кез келген x үшін анықталады. Сондықтан бұл функцияның анықталу облысы – бүкіл сан өсі. Енді тура пропорционалдық функциясының графигін салып көрейік.

1-мысал. $y = 2x$ функциясының графигін салу керек.

Шешуі. Аргумент пен оған сәйкес функция мәндерінен кесте құрып, нәтижесінде алынатын нүктелерді координаталық жазықтықта бейнелейміз (3.7-сурет). Нәтижесінде бұл нүктелер бір түзудің бойында жататынын көреміз.



3.7-сурет

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

2-мысал. $y = -\frac{1}{2}x$ функциясының графигін салайық.

Шешуі. Кесте құрамыз.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2	1,5	1	0,5	0	-0,5	-1	-1,5	-2

Бұл нүктелер де бір түзу бойында жатады (3.8-сурет).

Осы мысалдардан $y = kx$ тура пропорционалдық функциясы мен оның графигінің мынадай **қасиеттерін** аламыз:

1) x және y айнымалыларының әртүрлі сәйкес мәндері өзара пропорционал, яғни $y_1 = kx_1$ және $y_2 = kx_2$ болса, онда

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$$

теңдігі орындалады. k – **пропорционалдық коэффициент** деп аталады. Оны сәйкес түзудің **бұрыштық коэффициенті** деп те атайды. k санының $y = kx$ графигі мен Ox өсі арасындағы бұрышқа тәуелді болатыны жоғары сыныптарда көрсетіледі.

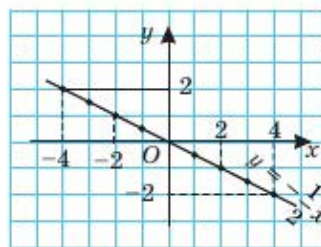
2) $y = kx$ функциясының графигі – координаталар бас нүктесі арқылы өтетін түзу сызық.

- Егер $k > 0$ болса, онда функция графигі I және III координаталық ширектер арқылы өтеді (3.7-сурет).

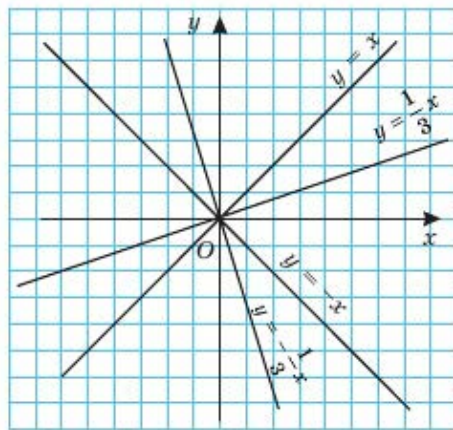
- Егер $k < 0$ болса, функция графигі II және IV координаталық ширектер арқылы өтеді (3.8-сурет).

- Егер $k = 0$ болса, функция графигі Ox өсімен беттеседі, яғни $y = 0$ теңдеуі Ox өсі арқылы өтетін түзу теңдеуі болады.

3.9-суретте k -ның әртүрлі мәндеріндегі түзулер бейнеленген.



3.8-сурет



3.9-сурет

3.2.2. $y = kx + b$ түріндегі функция және оның графигі

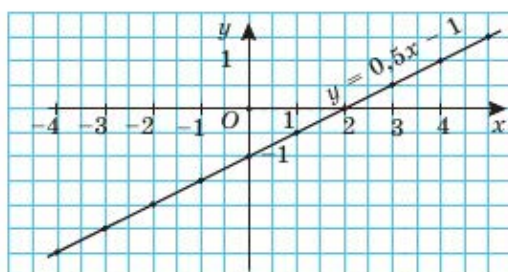
3-мысал. Бензині бар 20 литрлік канистрден x литр бензин алынды. Егер 1 л бензиннің массасы 0,9 кг болса, онда канистрде қалған бензиннің массасы y -ті табу керек.

Шешуі. 20 л бензиннің массасы $20 \cdot 0,9 = 18$ (кг), ал құйып алынған бензиннің массасы $0,9x$ (кг). Онда қалған бензиннің массасы былай анықталады: $y = -0,9x + 18$ (кг).

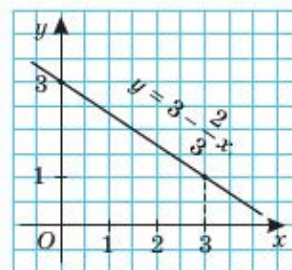
Сонымен, біз $y = kx + b$ түріндегі функцияны алдық. Оны **сызықтық функция** деп атайды. Мұнда k және b – берілген сандар. k **бұрыштық коэффициент** деп, ал b – **бос мүше** деп аталады.

$y = kx$ тура пропорционалдық функциясы $y = kx + b$ сызықтық функциясының дербес жағдайы ($b = 0$). (Қосымша QR-ды қараңдар.)





3.10-сурет



3.11-сурет

4-мысал. $y = 0,5x - 1$ функциясының графигін салу керек.

Шешуі. Ол үшін төмендегідей мәндер кестесін құрамыз.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1

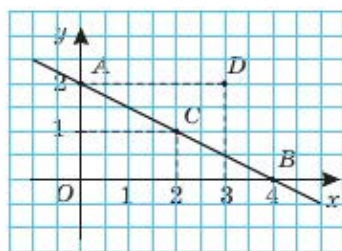
Шыққан нүктелерді қосып, $y = 0,5x - 1$ сызықтық функциясының графигін аламыз. Бұл график түзу сызық болады (3.10-сурет).

Сызықтық функцияның графигін салу үшін оның бойында жататын екі нүктенің координаталарын анықтап, осы нүктелерді сызғышпен қосса, жеткілікті.

$y = kx + b$ сызықтық функциясында $x = 0$ деп алсақ, онда $y = b$. Олай болса, оның графигі – Oy өсін координаталары $(0; b)$ нүктесінде қиып өтетін түзу.

5-мысал. $y = 3 - \frac{2}{3}x$ функциясының графигін салу керек.

Шешуі. Функцияның графигі координаталары $(0; 3)$ болатын нүкте арқылы өтеді. Енді осы түзу бойында жататын тағы бір нүктені анықтаса, жеткілікті. Ол үшін $x = 3$ деп алайық. Онда $y = 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1$, яғни түзу координаталары $(3; 1)$ болатын нүкте арқылы өтеді (3.11-сурет).



3.12-сурет

6-мысал. 3.12-суретте көрсетілген түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі. Түзу $A(0; 2)$ және $B(4; 0)$ нүктелері арқылы өтеді. Сондықтан $2 = k \cdot 0 + b$ және $0 = k \cdot 4 + b$ теңдіктері орындалуы қажет. Осыдан $b = 2$ және $k = -\frac{1}{2}$, яғни бізге қажетті сызықтық функция $y = -\frac{1}{2}x + 2$ түрінде жазылады.

Түзу бойында жататын нүкте координаталары осы түзу теңдеуін қанағаттандырады, ал оның бойында жатпайтын нүкте координаталары ол түзудің теңдеуін қанағаттандырмайды.

Мысалы, 3.12-суретте $C(2; 1)$ нүктесі $y = -\frac{1}{2}x + 2$ теңдеуімен берілген түзу бойында жатады, себебі $x = 2, y = 1$ деп алсақ, онда $1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \Rightarrow 1 = 1$ теңбе-теңдігін аламыз. Ал $D(3; 2)$ нүктесі бұл түзудің бойында жатпайды, себебі $x = 3, y = 2$ болғанда, $2 \neq -\frac{1}{2} \cdot 3 + 2$, яғни D нүктесінің координаталары түзудің теңдеуін қанағаттандырмайды.

Сонымен, 3.12-суреттегі түзудің теңдеуі: $y = \frac{1}{2}x + 2$; A, B, C нүктелері осы түзу бойында жатыр, ал D нүктесі түзуге тиісті емес.



1. Тура пропорционалдық функциясы деген не және ол қандай формуламен беріледі? Мысал келтіріңдер.
2. Бұрыштық коэффициент деген не? Оның таңбасы тура пропорционалдық графигінің орналасуына қалай әсер етеді? Мысал келтіріңдер.
3. Сызықтық функция деген не? Ол график қалай аталады?
4. Егер түзу Oy өсін координатасы $(0; 3)$ нүктесінде қиып өтсе, онда сәйкес сызықтық функцияның бос мүшесі неге тең? Мысал келтіріңдер.
5. Сызықтық функция мен тура пропорционалдық теңдеулерінің айырмашылығы мен ұқсастығы қандай?



Мектеп ғимараты биіктігін табыңдар. Ол үшін төмендегі сұрақтарға жауап іздестіріңдер.

- 1) Адам бойының ұзындығы мен оның көлеңкесінің ұзындығы пропорционал бола ма? Болса, күндізгі сағат 12.00-дегі адам мен оның көлеңкесі арасындағы пропорционалдық коэффициентін табыңдар. Жауаптарыңды негіздеңдер.
- 2) Мектеп ғимараты көлеңкесінің ұзындығын табыңдар.
- 3) Нәтижесін алынған пропорционалдық коэффициентіне көбейтіңдер. Осыдан алынатын сан мектеп ғимараты биіктігінің жуық мәні болады.
- 4) Осы тәсілмен кез келген биік заттың (бағанның, талдың) биіктігін анықтауға болады. Мұнда пропорционалдық коэффициентті анықтау үшін 1 метрлік немесе 2 метрлік түзу таяқты қолданса болады. Келтірілген биіктікті анықтау алгоритмін негіздеңдер.

Жаттығулар

А

3.40. $y = -\frac{1}{4}x$ функциясының графигін салып, осы график бойынша $x = 4; 2; 8$ мәніне сәйкес y -тің мәнін анықтаңдар.

3.41. $y = \frac{2}{3}x$ тура пропорционалдық функциясы үшін x -тің қандай мәнінде y – 3-ке, $\frac{4}{9}$ -ке, 4-ке тең болатынын анықтаңдар.

3.42. Велосипедші 15 км/сағ жылдамдықпен 2 сағ 30 мин жүрді. Сәйкес масштабты таңдап алып, велосипедшінің қозғалыс графигін салыңдар.

Көмек. Ox өсін қозғалыс уақыты t деп, ал Oy өсін жүрген жолды S , дәптердің 3 төркөзін 1 сағат деп алыңдар.

3.43. Ауданы 5 м^2 қабырғаны сырлау үшін 2 л бояу қажет.

1) Ауданы $S \text{ м}^2$ қабырғаны сырлау үшін қажет бояуды литр есебімен табу формуласын жазыңдар.

Көмек. Алдымен 1 м^2 қабырғаны сырлауға жұмсалатын бояудың мөлшерін табыңдар.

2) Жазған формулаң тура пропорционалдықты білдіре ме?

3) Ауданы $12,5 \text{ м}^2$ қабырғаны сырлау үшін неше литр бояу қажет?

4) 10 л бояумен ауданы қандай қабырғаны сырлауға болады?

3.44. Тура пропорционалдық функция кестемен берілген.

x	-2		1	3	
$y=kx$	4	0			-10

1) Кестені толтырыңдар; 2) бұрыштық коэффициентті табыңдар.

3.45. Кестелерді толтырыңдар.

1)

x	-2	0	1	3	7
$y=0,5x$					

2)

x	1		2		3
$y=-2x$		-3		-5	

3.46. Тура пропорционалдық функцияның графигі қай координаталық ширектер арқылы өтеді?

1) $y = 3x$

2) $y = -0,3x$

3) $y = -x$

4) $y = 0,2x$

3.47. Тұрақты функция графигін салыңдар.

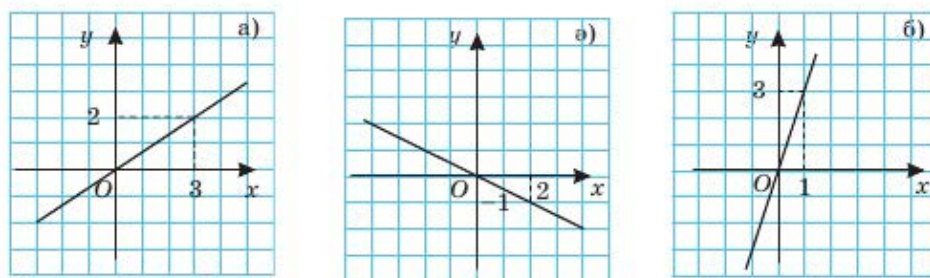
1) $y = 2$

2) $y = -2$

3) $y = 0$

4) $y = -3$

3.48. $A(8; 0)$, $B(-2; 3)$, $C(-2; 5)$ және $D(2; 5)$ нүктелерінің қайсысы $y = -0,5x + 4$ түзуінің бойында жатады? Осы сызықтық функцияның графигін салыңдар.



3.13-сурет

В

3.49. 3.13-суреттің әрқайсысында пропорционалдық коэффициентті анықтап, функцияны формуламен жазыңдар.

3.50. Сызықтық функцияның графигін салыңдар.

1) $y = \frac{2}{3}x - 4$; 2) $y = 2x + 6$ 3) $y = -1,5x - 3$

4) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 5) $y = \frac{5}{3}x - 2$; 6) $y = -\frac{4}{3}x + 2$

3.51. Сызықтық функция графигінің координаталар өсімен қиылысу нүктелерін анықтап, оның графигін салыңдар.

1) $y = 2x - 3$ 2) $y = -1,5x + 1$ 3) $y = 0,3x - 1,5$

4) $y = -x + 6$ 5) $y = 0,6x - 3$ 6) $y = -0,5x - 2$

3.52. $f(x) = kx - 3$ сызықтық функциясы үшін төмендегі шарт орындалатындай етіп, k -ның мәнін табыңдар.

1) $f(2) = 1$ 2) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3,3$ 3) $f(2) = -6$

Нәтижесінде анықталған үш түзудің қиылысу нүктесін табыңдар.

3.53. Автобус тұрақты 54 км/сағ жылдамдықпен жүріп келеді. t сағ уақытына тәуелді автобустың s км жүрген жолы бойынша кестені толтырыңдар. s және t пропорционал шамалар бола ма? Болса, олардың пропорционалдық коэффициенті қандай?

t , сағ	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$	2
s , км		27				

3.54. $f(x) = 1,5x + b$ сызықтық функциясы үшін төмендегі шарт орындалатындай етіп, b -нің мәнін табыңдар.

1) $f(1) = 4,5$

2) $f(-2) = 1,5$

3) $f(0,6) = -2$

Нәтижесінде анықталған үш түзу қиылыса ма әлде параллель бола ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.

3.55. Пропорционалдық коэффициентін тауып, кестені толтырыңдар.

x		-1	1	2		5
y	1,2				-2,4	-3

3.56. Керосиннің тығыздығы $0,8 \text{ г/см}^3$. 20 литрлік канистрге неше килограмм керосин сыяды?

C

3.57. $M_1(x_1; y_1)$ және $M_2(x_2; y_2)$ нүктелері арқылы өтетін сызықтық функцияны формуламен жазыңдар. Осы формуланы пайдаланып, келесі нүктелер арқылы өтетін түзу теңдеуін жазыңдар:

1) $A(2; 0)$ және $B(0; 3)$; 2) $P(-1; -4)$ және $Q(2; 2)$.

3.58. 3.57-есепте берілген сызықтық функциялар графигі Oy өсін қай нүктеде қиып өтеді? Жауаптарыңды негіздеңдер. Бұл түзулер қай координаталық бұрыштан үшбұрыш қиып өтеді?

3.59. $y = kx + b$ сызықтық функциясы кестелермен берілген.

1)

x	-2	-1	0	1	2
y			4		3

2)

x	-2,5	-1	0	1	2
y	-4,25			-2,5	

Кестелер бойынша:

- 1) k -ның және b -нің мәндерін анықтап, сызықтық функцияны формуламен жазыңдар;
- 2) кестедегі бос орындарды толтырыңдар;
- 3) сызықтық функция графигінің координаталар өсімен қиылысу нүктесін анықтап, оның графигін салыңдар;
- 4) сызықтық функция графигінің координаталық бұрыштан қиып өтетін үшбұрыш ауданын табыңдар.

3.60. Бұрыштық коэффициенттері берілген сызықтық функциялардың бұрыштық коэффициенттерімен тең болатындай тура пропорционалдық функцияның теңдеуін жазып, оларды бір координаталық жазықтыққа салыңдар.

1) $y = 2x + 3$

2) $y = \frac{1}{2}x - 5$

3) $y = -x + 4$

4) $y = -3x + 1$

- 3.61. Мотоциклші 40 км қашықтықта орналасқан ауылға тұрақты жылдамдықпен соқпақ жолмен 1 сағ 15 минутта жетуді жоспарлады. Ол 20 мин ішінде 10 км жол жүргенін байқады. Егер мотоциклші осы тұрақты жылдамдықпен жүре берсе, ауылға өзі жоспарлаған уақытында жете ала ма? Ол ауылға дер кезінде жету үшін қалған 30 км жолды қандай жылдамдықпен жүріп өтуі тиіс?

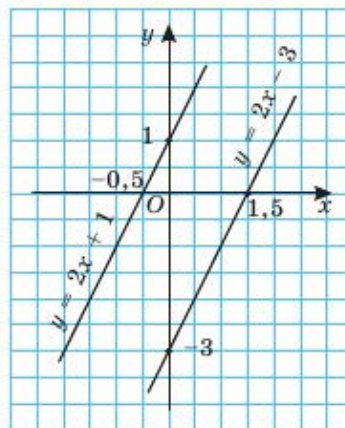
Қайталауға арналған жаттығулар

- 3.62. Теңдеулерді шешіңдер: 1) $\frac{2(x-9)}{3} + \frac{x+10}{6} = \frac{3(x-6)}{4}$; 2) $\frac{12}{1+|x|} = 3$.
- 3.63. Үш таңбалы санды разряд бірліктеріне жіктегенде 5 жүздік, 6 ондық және n бірліктің қосындысы түрінде жазылды. Бұл сан 6-ға еселік болуы үшін n -нің мәні неге тең болуы керек?
- 3.64. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{3a^2 + 5b}{2a - 1} + \frac{a^2 - 2b^2}{3 - 4b}$.

3.2.3. Жазықтықта түзулердің өзара орналасуы

1-мысал. $y = 2x - 3$ және $y = 2x + 1$ сызықтық функцияларымен берілген түзулердің қиылыспайтынын көрсетейік.

Шешуі. Қарсы жорып, бұл екі түзу $C(a; b)$ нүктесінде қиылысады деп алсақ, онда C нүктесінің координаталары осы екі теңдеуді де қанағаттандыруы қажет, яғни $b = 2a - 3$ және $b = 2a + 1$ теңдіктері орындалуы тиіс. Бұл теңдіктердің сол жақтары тең болғандықтан, олардың оң жақтары да тең болуы керек: $2a - 3 = 2a + 1 \Rightarrow 2a - 2a = 1 + 3 \Rightarrow 0 = 4$ теңдігін аламыз. Бұл мүмкін емес. Сондықтан берілген екі түзуге де ортақ $C(a; b)$ нүктесі бар деп жоруымыз дұрыс емес, яғни бұл екі түзу қиылыспайды. Берілген функциялардың графигін салып та, осы қорытындыға келеміз: координаталық жазықтықта параллель түзулер аламыз (3.14-сурет).



3.14-сурет

Бұрыштық коэффициенттері тең сызықтық функциялармен берілген түзулер параллель болады.

2-мысал. $y = 3x - 6$ және $y = -\frac{1}{2}x + 1$ түзулерінің қиылысатынын көрсетейік.

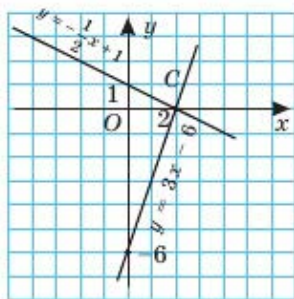
Шешуі. Бұл екі түзудің ортақ нүктелері бар болса, яғни осы нүктелердің координаталары екі түзудің теңдеуін қанағаттандырса, онда $3x - 6 = -\frac{1}{2}x + 1$ теңдігі орындалуы керек. Бөлшекті ықшамдау үшін теңдіктің екі жағын да 2-ге көбейтеміз, сонда: $6x - 12 = -x + 2 \Rightarrow \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$. Онда $y = 3 \cdot 2 - 6 = 0$, яғни түзулер $C(2; 0)$ нүктесінде қиылысады (3.15-сурет). Оны берілген сызықтық функциялардың графигін салу арқылы да анықтауға болады.

Бұрыштық коэффициенттері әртүрлі сызықтық функциялармен берілген түзулер қиылысады.

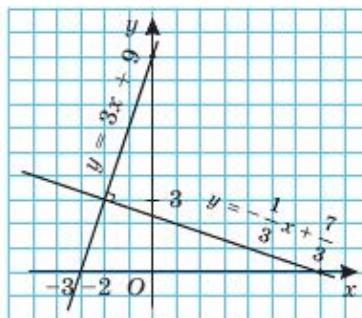
3-мысал. $y = 3x + 9$ және $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ функциялары графигін салып, олардың арасындағы бұрышты транспортирдің көмегімен өлшейік (3.16-сурет). Сонда бұрыш шамасы 90° болатынын көреміз.

Осы сияқты, $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ және $y = -2x$ функцияларының графигін салсақ (3.17-сурет), бұл түзулердің арасындағы бұрыш 90° -қа тең болады.

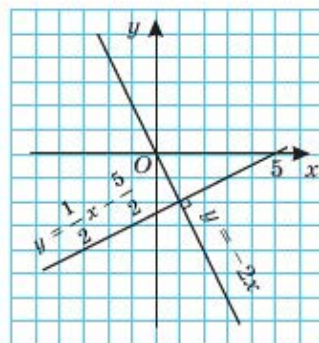
Егер $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ теңдігі орындалса, онда $y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ түзулері перпендикуляр болады. Мұны түзулердің перпендикулярлық шарты деп атайды.



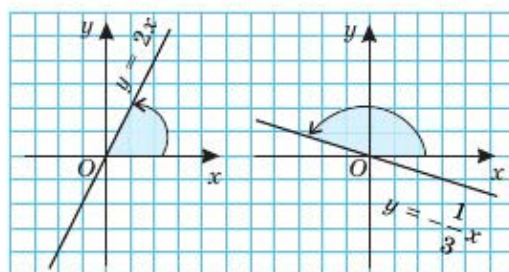
3.15-сурет



3.16-сурет



3.17-сурет



3.18-сурет

3.2.4. Жазықтықта түзулердің координаталар өсіне қатысты орналасуы

3.2.1 бабында тура пропорционалдық функция графиктерінің ерекшеліктерін атап өттік. Атап айтсақ, $y = kx$ функциясының бұрыштық коэффициенті $k > 0$ болса, онда сәйкес түзу Ox өсімен сүйір бұрыш жасайтынын, ал $k < 0$ болғанда, бұл бұрыш доғал болатынын көрдік. Мысалы, 3.18-суретте $y = 2x$ және $y = -\frac{1}{3}x$ функцияларының графигі бейнеленген.

$y = kx$ тура пропорционалдық функциясы $y = kx + b$ сызықтық функцияның дербес жағдайы ($b = 0$ болғанда) және бұл екі түзу өзара параллель болғандықтан, олардың Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрыштары да бірдей. Сызықтық функция графигінің координаталар өсіне байланысты орналасуын төмендегі кестеден көруге болады.

$y = kx + b$ функциясы	Графигі	k -ның таңбасы	b -нің таңбасы
$y = -\frac{1}{2}x + 3$		$k = -\frac{1}{2}$ теріс	$b = 3$ оң
$y = \frac{1}{2}x + 3$		$k = \frac{1}{2}$ оң	$b = 3$ оң
$y = -\frac{1}{2}x - 3$		$k = -\frac{1}{2}$ теріс	$b = -3$ теріс
$y = \frac{1}{2}x - 3$		$k = \frac{1}{2}$ оң	$b = -3$ теріс



1. Қандай шарт орындалғанда екі сызықтық функцияның графигі: а) қиылысады; ә) параллель болады; б) перпендикуляр болады? Мысал келтіріңдер.
2. Екі сызықтық функцияның бос мүшелері тең болса, бұл функциялар қалай орналасуы мүмкін? Егер өзара тең бос мүшелері b -ға тең болса, онда қиылысу нүктесінің координаталары қандай?



Тараздан Алматыға қарай жүретін автобуспен хат жолданды. Хаттың мазмұны шұғыл қажет болғандықтан, автобустың жүргеніне 1 сағ өткенде Алматыдан қарсы бағытта жеңіл автокөлік шығып, автобуспен 3 сағаттан кейін кездесті. Тараз бен Алматы арасы 500 км. Автобустың орташа жылдамдығы x км/сағ, ал жеңіл көліктің орташа жылдамдығы y км/сағ деп алып:

- 1) x пен y -тің бір-біріне тәуелділігін теңдеу арқылы жазыңдар.
- 2) Егер $x = 70$ км/сағ болса, онда y -тің мәні қандай болуы қажет?
- 3) Егер автобан бойындағы жылдамдыққа қойылған шектеу 90 км/сағ болса, онда автобус пен жеңіл көлік ең жылдам дегенде неше сағаттан соң кездеседі?
- 4) Егер автобустың орташа жылдамдығы 60 км/сағ болса, онда ол жеңіл көлікпен 3 сағаттан соң кездесе алар ма еді?
Естеріңде болсын! Жол жүру ережесі бойынша көрсетілген шектеуден артық жылдамдықпен жүруге тыйым салынған!

Жаттығулар

А

- 3.65. Берілген сызықтық функциялар графигіне параллель болатын тура пропорционалдық функцияларды жазыңдар.

$$\begin{array}{lll} 1) y = 3x + 2 & 2) y = -0,3x - 2 & 3) y = \frac{1}{2}x + 4 \\ 4) y = 1,5x - 5 & 5) y = -\frac{2}{3}x + 4 & 6) y = -6x + 1 \end{array}$$

- 3.66. Сызықтық функция графигі тек: 1) I және III координаталық ширекте; 2) II және IV координаталық ширектерде; 3) I және II координаталық ширектерде; 4) III және IV координаталық ширектерде; 5) I және IV координаталық ширектерде; 6) II және III координаталық ширектерде орналасуы мүмкін бе?

Егер мүмкін болса, оның формуласы қандай? Мысал келтіріңдер. Жауаптарыңды негіздеңдер.

- 3.67. Бос торкөзге қандай санды қойғанда берілген екі сызықтық функцияның графигі параллель болады?

$$\begin{array}{ll} 1) y = 3x - 4 \text{ және } y = \square \cdot x + 4 & 2) y = -\frac{1}{2}x \text{ және } y = \square \cdot x + 3; \\ 3) y = \square \cdot x - 1 \text{ және } y = -0,3x - 3 & 4) y = \square \cdot x + 7 \text{ және } y = -2x - 3. \end{array}$$

3.68. Бос торкөздің орнына қандай сан қойғанда берілген екі түзу перпендикуляр болады?

1) $y = 3x - 4$ және $y = \square \cdot x + 4$ 2) $y = -\frac{1}{2}x$ және $y = \square \cdot x + 3$

3) $y = \square \cdot x - 1$ және $y = -0,3x - 3$ 4) $y = \square \cdot x + 7$ және $y = -2x - 3$

3.69. Сызықтық функциялардың графигін салып, олардың қиылысу нүктелерін анықтаңдар.

1) $y = 2x - 3$ және $y = \frac{1}{2}x$; 2) $y = 1,5x + 2$ және $y = -2x - 5$

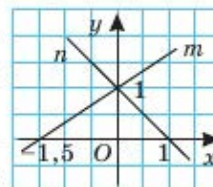
3) $y = 0,5x$ және $y = -0,3x + 3,2$ 4) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ және $y = 3x - 11$

3.70. 3.69-есептегі сызықтық функция графиктерінің қиылысу нүктесін аналитикалық жолмен анықтап, тексеріңдер.

3.71. k мен b -нің қандай мәнінде: 1) $y = kx + 3$; 2) $y = -2x + b$ функцияларының графигі $A(1; -2)$ нүктесі арқылы өтеді? Екі сызықтық функцияның графигін бір координаталар жүйесінде салып, тексеріңдер.

В

3.72. 3.19-суретте графиктері берілген сызықтық функциялардың теңдеуін жазып, олардың қиылысу нүктесінің координатасын аналитикалық жолмен анықтап, тексеріңдер.



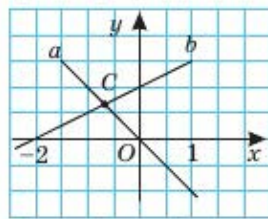
3.19-сурет

3.73. Графигі $y = -0,5x + 4$ функциясы графигіне параллель болатын және бос мүшесі: 1) -4 -ке; 2) 3 -ке; 3) -1 -ге; 4) 5 -ке тең болатын сызықтық функция теңдеуін жазыңдар. Осы түзулердің барлығын бір координаталар жүйесінде салып көрсетіңдер.

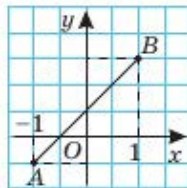
3.74. Графигі $y = 2x - 3$ функциясы графигіне параллель болатын және: 1) $A(1; 2)$; 2) $B(2; -1)$; 3) $C(0; 2)$; 4) $D(3; 0)$ нүктелері арқылы өтетін сызықтық функция теңдеуін жазыңдар. Осы түзулердің барлығын бір координаталар жүйесінде салып көрсетіңдер.

3.75. Графигі $y = -0,5x + 4$ функциясы графигіне перпендикуляр болатын және бос мүшесі: 1) -4 -ке; 2) 3 -ке; 3) -1 -ге; 4) 5 -ке тең болатын сызықтық функция теңдеуін жазыңдар.

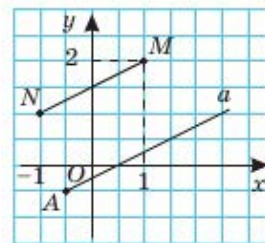
3.76. Графигі $y = 2x - 3$ функциясы графигіне перпендикуляр болатын және: 1) $A(1; 2)$; 2) $B(2; -1)$; 3) $C(0; 2)$; 4) $D(3; 0)$ нүктесі арқылы өтетін сызықтық функция теңдеуін жазыңдар.



3.20-сурет



3.21-сурет



3.22-сурет

С

- 3.77. $y = \frac{4}{3}x - 1$ функциясы графигін салыңдар. График бойынша осы түзу бойында жататын және координаталары натурал сандар болатын нүктені анықтаңдар. Осы нүкте арқылы берілген түзуге перпендикуляр түзу жүргізіңдер және перпендикуляр түзудің бұрыштық коэффициенті мен бос мүшесін табыңдар.
- 3.78. 3.20-суретте берілген a және b түзулерінің теңдеуін жазыңдар. График бойынша C нүктесінің координаталарын жуық шамамен анықтап, оның дұрыстығын аналитикалық жолмен тексеріңдер.
- 3.79. 3.21-суретте AB кесіндісінің графигі бейнеленген. Осы кесінді теңдеуін формуламен анықтаңдар. Ол үшін алдымен AB кесіндісі бойымен өтетін түзу теңдеуін жазыңдар (сызықтық функцияны), содан соң кесінді сәйкес түзудің шектеулі бөлігі болатынын ескеріңдер.
- 3.80. 3.22-суретте көрсетілген MN кесіндісі мен a сәулесінің теңдеуін жазыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

- 3.81. Бөлшектерді қысқартыңдар.

$$1) \frac{(5,7 + 1,9) \cdot 1,44}{(-1,9) \cdot 0,48} \quad 2) \frac{(9,5 - 6) \cdot 0,9}{(-0,1) \cdot 0,7}$$

- 3.82. m^{10} ($m \neq 0$) санын негізі: 1) m^2 ; 2) m^{-5} ; 3) $\frac{1}{m^2}$ болатындай етіп, дәреже түрінде жазыңдар.

- 3.83. Көпмүшелерді стандарт түрде жазыңдар.

$$1) (1 + 3a) + (a^2 - 2a) - (2a^2 - a) \\ 2) (5x - 12x^2) + (x + 11x^2) - (x^2 - 1)$$

3.3. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешу

3.3.1. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің графигі

1-мысал. Дүкеннен алынған тауар құны 4680 тг болды. Сатып алушы дүкеншіге 5000 тг берді. Төлемақыдан қалған ақшаны дүкенші 20 және 50 теңгелік монеталармен қайтарды. Қайтарылған әрбір монетаның саны қандай?

Шешуі. Айталық, дүкенші m дана 20 теңгелік және n дана 50 теңгелік монеталар қайтарған болсын. Онда $20m + 50n = 320$ (тг) теңдігі орындалуы қажет. Бұл теңдеуді 10-ға қысқартып,



$$2m + 5n = 32$$

түріндегі екі белгісізі (m және n айнымалылары) бар теңдеу аламыз. Осы теңдеудің әрбір натурал шешімі дүкеншінің қанша 20 теңгелік және қанша 50 теңгелік монеталар қайтарғанын көрсетеді. Осындай теңдеулерді **екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер** деп атайды.

Анықтама. $ax + by = c$ түріндегі теңдеуді **екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу** деп атайды. Мұнда x және y – айнымалылар, ал a , b және c – берілген тұрақты сандар. a мен b айнымалылардың коэффициенттері деп, ал c бос мүше деп аталады.

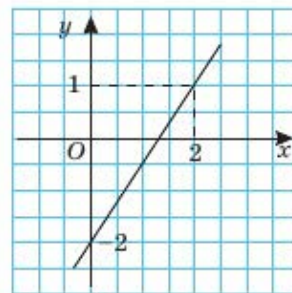
Егер p және q сандары үшін $ap + bq = c$ санды теңбе-теңдігі орындалса, онда p және q сандарын $ax + by = c$ теңдеуінің шешімі деп атайды немесе осы сызықтық теңдеу графигі $P(p; q)$ нүктесі арқылы өтеді деп айтады. Мұнда $ax + by = c$ теңдеуінің графигі деп оның шешімі болатын жазықтықтағы барлық (x, y) нүктелері жиынын айтады. Мысалы, $m = 6$ және $n = 4$ сандары $2m + 5n = 32$ теңдеуінің шешімдері болады.

2-мысал. $3x - 2y = 4$ сызықтық теңдеуінің графигін салып көрейік.

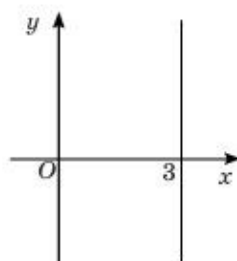
Шешуі. Теңдеуді түрлендірсек, $y = 1,5x - 2$ сызықтық функциясын аламыз. Оның графигі түзу болады (3.23-сурет).

Сонымен, егер $b \neq 0$ болса, онда $ax + by = c$ сызықтық теңдеуінің графигі түзу болады,

оның бұрыштық коэффициенті $k = -\frac{a}{b}$ -ға тең.



3.23-сурет



3.24-сурет

3-мысал. Енді $b = 0$ болатын жағдайды қарастырайық. Мысалы, $2x + 0 \cdot y = 6$ теңдеуінің графигі қандай болмақ? Осыдан $x = 3$ теңдігін аламыз. Бұл теңдеу графигіне тиісті нүктелердің абсциссасы 3-ке тең, ал ординатасы – кез келген сан. Мұндай нүктелер Ox өсін координаталары $(3; 0)$ нүктесінде қиып өтетін және Oy өсіне параллель түзу бойында жатады (3.24-сурет).

Сонымен, егер $b = 0$ болса, сызықтық теңдеу графигі Oy өсіне параллель түзу болады.

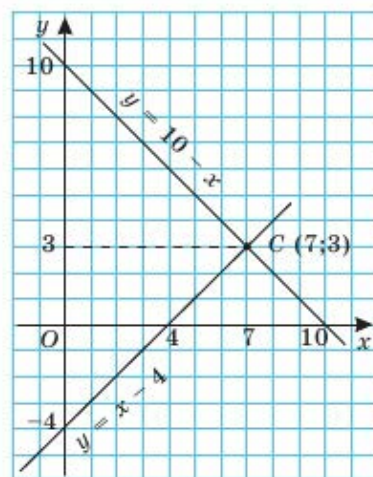
Мұндай сызықтық теңдеулер сызықтық функцияны анықтамайды, өйткені бұл жерде функцияның бірімділік қаридасы орындалмайды, яғни x -тің жалғыз мәніне y -тің шексіз көп мәні сәйкес келеді.

3.3.2. Сызықтық теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешу

4-мысал. Екі таңбалы санның ондықтар разрядындағы цифрдың мәні бірліктер разрядындағы цифр мәнінен 4-ке кем, ал оның цифрларының қосындысы 10-ға тең. Осы екі таңбалы санды табу керек.

Шешуі. Айталық, x – екі таңбалы санның бірліктер разрядындағы, ал y – ондықтар разрядындағы цифрдың мәні болсын. Онда есеп шарты бойынша $y = x - 4$ және $x + y = 10$ болуы керек. Осы теңдеулерден x пен y -ті анықтау үшін оларды бір жүйеге алып жазады:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 10. \end{cases}$$



3.25-сурет

Алынған жүйенің әрбір теңдеуі *сызықтық теңдеу және олардың графигі түзу сызық* болады.

Координаталар жүйесінде бұл екі түзу $C(7; 3)$ нүктесінде қиылысады (3.25-сурет). Олай болса, $x = 7$, $y = 3$ сандары – көрсетілген жүйенің жалғыз шешімі.

Есептің *жауабы*: 37.

Жүйелерді шешудің көрсетілген тәсілі **графиктік тәсіл** деп аталады.

Енді жүйелерді графиктік тәсілмен шешуге бірнеше мысал қарастырайық.

5-мысал.
$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ y = 2x \end{cases}$$
 теңдеулер жүйесін

графиктік тәсілмен шешу керек.

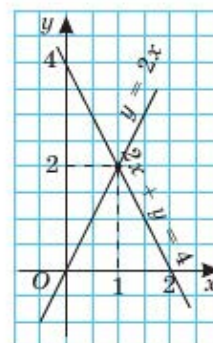
Шешуі. Жүйеде берілген екі сызықтық теңдеудің графиктерін саламыз (3.26-сурет). Бұл түзулер координаталары (1; 2) нүктесінде қиылысады.

Жауабы: $x = 1, y = 2$.

6-мысал.
$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$
 теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. Теңдеулер жүйесін келесідей түрге келтіріп алып, графигін салайық.

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ 2x - 4y = -4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = x - 2, \\ 4y = 2x + 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1, \\ y = \frac{1}{2}x + 1. \end{cases}$$



3.26-сурет

Енді осы екі функцияның графигін салу үшін әрбір теңдеуді қанағаттандыратындай екі нүктенің координаталарын тапсақ, жеткілікті (3.27-сурет).

Функцияның графиктері – түзу сызықтар және олар өзара параллель. Сондықтан берілген теңдеулер жүйесінің шешімі болмайды. Бұл екі теңдеуді де қанағаттандыратын x пен y -тің бірде бір мәнінің жоқ екенін белдіреді. Оны $\emptyset$ – бос жиын белгісімен көрсетеді.

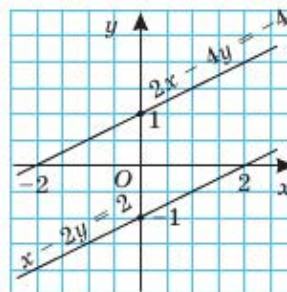
Жауабы: $\emptyset$.

7-мысал.
$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$
 жүйесін шешейік.

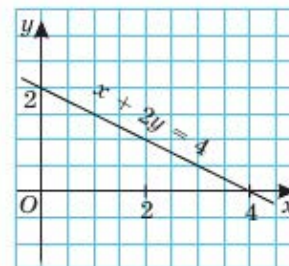
Шешуі. Берілген теңдеулер жүйесін келесідей түрге келтіріп алып, графигін салайық.

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + 6y = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 4 - x, \\ 6y = 12 - 3x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2, \\ y = -\frac{1}{2}x + 2. \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесінің графиктері болатын түзулер беттеседі. Түзудің графигі 3.28-суретте көрсетілген және осы түзу бойындағы кез келген нүктенің координаталары берілген жүйенің



3.27-сурет



3.28-сурет

решениями. Бұл жағдайда жүйенің шексіз көп шешімі бар деп айтады.

Жауабы: шексіз көп шешімі бар. Ол шешімдердің әрқайсысы: $x + 2y = 4$ теңдеуімен анықталады.

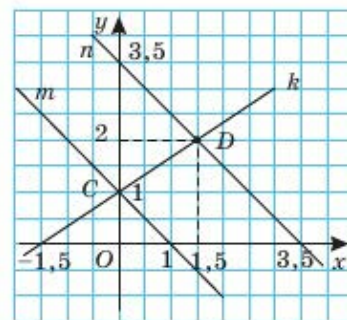


1. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу деп нені айтады?
2. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу графигі деген не? Ол график қалай аталады?
3. Сызықтық теңдеу мен сызықтық функция арасында қандай байланыс бар?
 $ax + by = c$ сызықтық теңдеуін сызықтық функция түрінде қалай жазады? Ол үшін b -нің мәні неге тең болуы (немесе тең болмауы) керек?
4. Жүйені графиктік тәсілмен шешудің мағынасы қандай?



3.29-сурет бойынша:

1. m , n және k түзулерінің теңдеуін жазып, оларды сызықтық теңдеу түріне келтіріңдер.
2. C және D нүктелерінің координаталарын анықтаңдар.
3. Жазылған сызықтық теңдеулер көмегімен барлық теңдеулер (екі теңдеуден құралған) жүйесін жазып шығыңдар. Олардың арасынан жалғыз шешімі барын, шешімі жоғын атап көрсетіңдер.
4. Осы теңдеулер көмегімен шексіз көп шешімі бар жүйе құрастыруға бола ма және ондай жүйелер саны нешеу болар еді? (Тапсырманы топтасып орындаған тиімді).



3.29-сурет

Жаттығулар

А

- 3.84. $\begin{cases} y = 2x, \\ x - y = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің неше шешімі бар? 1) $x = 1, y = 2$; 2) $x = 3, y = 0$; 3) $x = -3, y = -6$ мәндері жұбының қайсысы жүйенің шешімі болатынын графиктік тәсілмен тексеріңдер.

3.85. Сызықтық теңдеулерді $y = kx + b$ түріне келтіріңдер.

- | | | |
|-------------------|-------------------|---------------------|
| 1) $x + y = 2$ | 2) $-2x + y = -3$ | 3) $2x - 3y = 4$ |
| 4) $7x - 2y = 10$ | 5) $x + 2y = -2$ | 6) $3,5x + 2y = 15$ |

3.86. Сызықтық функцияларды сызықтық теңдеу түріне келтіріңдер.

1) $y = -3,5x + 6$

2) $y = -1,5x + \frac{3}{4}$

3) $y = \frac{1}{3}x + 4$

4) $y = 2x$

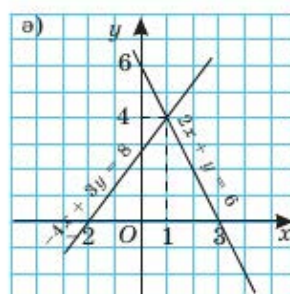
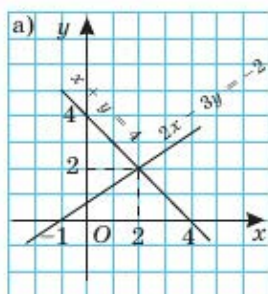
5) $y = 3$

6) $y = \frac{5}{2}x - \frac{8}{3}$

3.87. 3.30 а, ә-суреттер бойынша:

1) теңдеулер жүйесін құрыңдар;

2) график бойынша құрылған теңдеулер жүйесінің шешімдерін табыңдар.



3.30-сурет

3.88. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер.

1) $\begin{cases} y = x, \\ x + 2y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x - 3y = 9. \end{cases}$

3.89. 3.85-есепте берілген сызықтық теңдеулер жүйесі графигінің координаталар өсімен қиылысу нүктелерін анықтаңдар.

3.90. $3x - 4y = 7$ теңдеуінің графигі берілген нүктелер арқылы өте ме?

1) $A(3; 4)$

2) $B(3; \frac{1}{2})$

3) $C(1; -1)$

4) $D(1; 1)$

3.91. $2x + y = c$ түзуі $A(3; -4)$ нүктесі арқылы өтеді. c -ні табыңдар.

В

3.92. $3x + by = 12$ түзуі $C(2; 3)$ нүктесі арқылы өтеді. Бұл түзу

1) $A(0; 6)$; 2) $B(-4; 6)$ нүктелері арқылы өте ме?

3.93. $ax - 5y = 7$ түзуі $2x - 5y = -3$ түзуіне параллель. Бұл түзу
1) $C(1; 1)$; 2) $D(1; -1)$ нүктелері арқылы өте ме?

3.94. $x - 2y = 0$ және $2x + y = -5$ теңдеулерімен берілген түзулердің
қиылысу нүктесін анықтаңдар. $3x - 2y = -4$ түзуі осы нүкте арқылы
өте ме?

3.95. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер.

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x + y = 3. \end{cases} & 2) \begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = -3. \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 5x - 2y = -1. \end{cases} & 4) \begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ -x + 1,5y = -2. \end{cases} \end{array}$$

3.96. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер.

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 0,5x + y = 2, \\ -2x + 5y = 10. \end{cases} & 2) \begin{cases} 3x - 4y = -4, \\ 3x - 4y = 7. \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 4x - 3y = 0, \\ 3x + 2y = 17. \end{cases} & 4) \begin{cases} 5x - 4y = 0, \\ 2,5x - 2y = 1. \end{cases} \end{array}$$

3.97. $ax - 3y = 4$ түзуі $x - y = 7$ және $x + y = -3$ түзулерінің қиылысу
нүктесі арқылы өтеді. a -ны табыңдар.

3.98. $2x + by = 3$ түзуі $4x - 3y = 0$ және $-2x + 3y = -12$ түзулерінің
қиылысу нүктесі арқылы өтеді. b -ні табыңдар.

С

3.99. Үш сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі бар ма?

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = -1, \\ 2x - 3y = 8. \end{cases} & 2) \begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x - y = 7, \\ 3x + 4y = 6. \end{cases} \end{array}$$

3.100. 1) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ ax + by = c; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 11, \\ ax + by = c. \end{cases}$ жүйесінің а) жалғыз шешімі бар;

ә) шешімі жоқ; б) шексіз көп шешімі бар болатындай етіп a , b және c -ні
анықтаңдар.

3.101. Қандай шарт орындалғанда $ax + by = c$ түзуі:

- 1) Ox өсіне параллель;
- 2) Oy өсіне параллель;
- 3) координаталар бас нүктесі арқылы өтеді;
- 4) $2x - 3y = 7$ түзуіне параллель;
- 5) $2x - y = 7$ түзуіне перпендикуляр болады?

3.4. $y = ax^2$, $y = ax^3$ функциялары және олардың графигі

ax , ax^2 , ax^3 және т. с. с. өрнектер қарапайым бірімшелер қатарына қосылады. Мұнда a – берілген сан, ал x – айнымалы. $y = ax^2$ және $y = ax^3$ функцияларын қарастырып, графиктерін салайық.

3.4.1. $y = ax^2$ функциясы және оның графигі

Алдымен $y = ax^2$ функциясын зерттеп, графигін салайық.

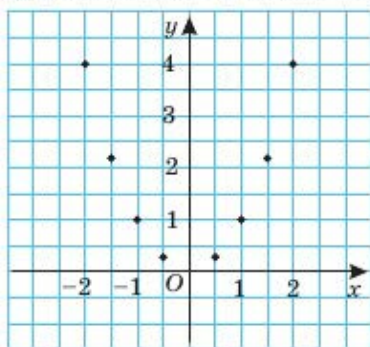
1. $a = 1$ болса, онда $y = x^2$ функциясын аламыз.

x пен y -тің сәйкес мәндерін кестеге жазайық.

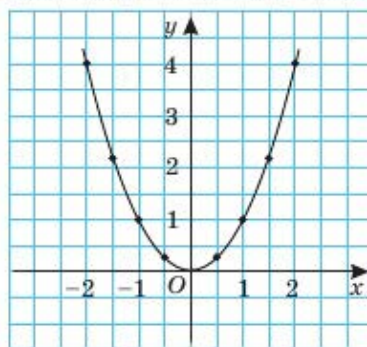
x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Кестеде анықталған нүктелерді координаталық жазықтықта белгілеп (3.31-сурет), оларды бірыңғай тегіс қисық сызықпен қосу арқылы $y = x^2$ функциясының графигін шығарып аламыз (3.32-сурет).

Oy өсінің сол жақ және оң жақ бөліктерінде бұл график шексіз жалғаса береді, яғни суретте оның тек координаталар бас нүктесі маңайындағы бөлігі ғана бейнеленген. $y = x^2$ функциясының графигін **парабола** деп атайды. $y = x^2$ теңдеуімен берілген **параболаның төбесі** деп координатасы $(0; 0)$ нүктесін айтады. Ордината өсі параболаның симметрия өсі



3.31-сурет



3.32-сурет

болады, оны парабола өсі деп те атайды. Симметрия өсінің екі жағында орналасқан параболаның бөліктері **парабола тармақтары** деп аталады.

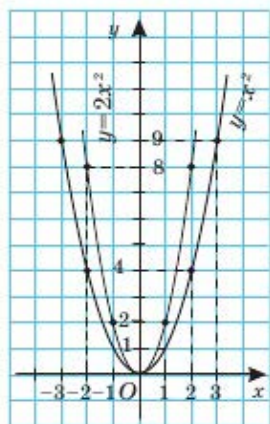
- Егер $x = 0$ болса, онда $y = 0$. Олай болса, $y = x^2$ функциясының графигі координаталар бас нүктесі арқылы өтеді.

- Егер $x \neq 0$ болса, онда нөлге тең емес санның квадраты ретінде $y > 0$ болады. Сондықтан $y = x^2$ функциясының графигі координаталары $(0; 0)$ нүктесін есепке алмағанда, абсцисса өсінен жоғары орналасады.

Әрбір x үшін $(-x)^2 = x^2$ теңдігі орындалады. Онда функция графигіндегі абсциссаның қарама-қарсы нүктелері ордината өсіне қатысты симметриялы. Сондықтан $y = x^2$ функциясының графигі ордината өсіне қатысты симметриялы болады.

2. $a > 1$ болсын. Мысал ретінде $y = 2x^2$ функциясын қарастырып, оны $y = x^2$ функциясымен салыстырайық. Ол үшін бір кестеге әрбір функцияға сәйкес x пен y -тің мәндерін жазамыз.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y = x^2$	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4
$y = 2x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8



3.33-сурет

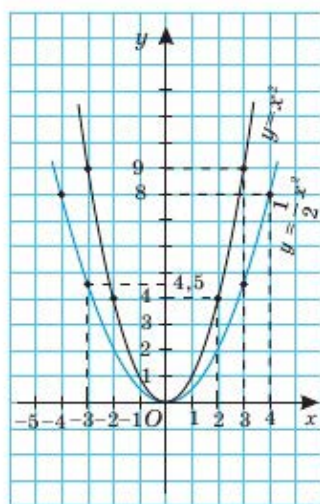
Кестеден x -тің бірдей мәндерінде $y = 2x^2$ функциясының мәндері $y = x^2$ функциясының сәйкес мәндерінен 2 есе үлкен екенін көреміз. Демек, $y = 2x^2$ функциясының графигін салу үшін, алдымен $y = x^2$ функциясының графигін салып, графиктегі нүктелердің ординатасын 2 есе арттырса, жеткілікті (3.33-сурет).

Осы сияқты, $a > 1$ жағдайында x -тің әрбір мәнінде $y = ax^2$ функциясының мәндері $y = x^2$ функциясы мәндерінен a есе үлкен болады. Олай болса, $y = ax^2$ функциясының графигін салу үшін $y = x^2$ функциясының графигін Oy өсіне параллель бағытта a есе «созу» арқылы шығарып алуға болады.

3. Егер $0 < a < 1$ болса, онда x -тің әрбір мәнінде $y = ax^2$ функциясының мәндері $y = x^2$ функциясының сәйкес мәндерінен

$\frac{1}{a}$ есе кіші. Мысалы, $a = \frac{1}{2}$ болғанда, x -тің әрбір мәнінде $y = \frac{1}{2}x^2$ функ-

циясының мәндері $y = x^2$ функциясының мәндерінен $\frac{1}{a} = a^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$



3.34-сурет

да, $y = ax^2$ функциясының графигін $y = x^2$ параболасынан былай шығарып алуға болады: $y = x^2$ параболасының ординаталарын a санына көбейтіп, шыққан нүктелерге абсцисса өсіне қатысты симметриялы нүктелерді алу қажет.

Мысалы, 3.35-суретте a -ның әртүрлі мәндеріне сәйкес келетін $y = ax^2$ параболалары салынған.

Егер $a > 0$ болса, онда сәйкес **параболалар «ойыс»**, ал $a < 0$ болғанда, сәйкес **параболалар «дөңес»** болатынын көреміз.

3.4.2. $y = ax^3$ функциясы және оның графигі

$y = x^3$ функциясының графигін салайық.

1. $a = 1$ болсын. Кестеге x пен y айнымалыларының сәйкес мәндерін жазайық.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	-8	-3,375	-1	-0,125	0	0,125	1	3,375	8

Көрсетілген координаталары бойынша координаталық жазықтықта нүктелерді белгілеп, оларды бірыңғай тегіс қисық сызықпен қосу арқылы

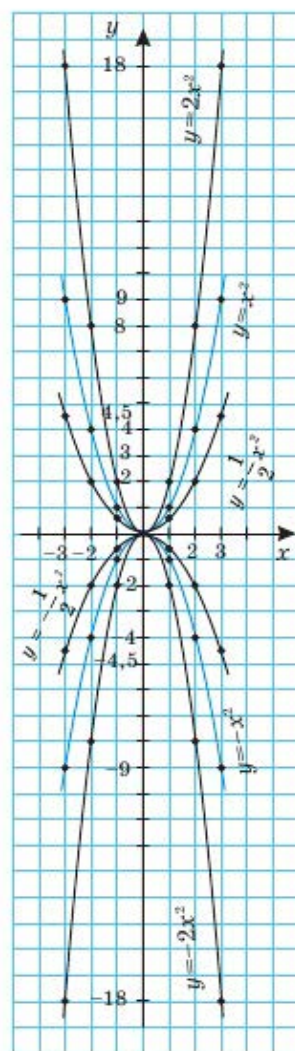
есе кем болады (3.34-сурет), яғни $y = \frac{1}{2}x^2$

функциясының графигін салу үшін $y = x^2$ функциясының графигін Oy өсіне параллель бағытта Ox өсіне қарай екі есе «сығу» керек.

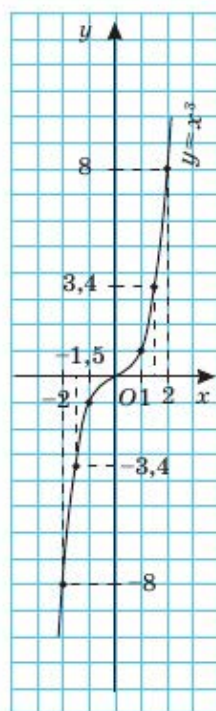
4. $a < 0$ болсын. Мысалы, $y = -2x^2$ функциясын қарастырайық.

x -тің бірдей мәндерінде $y = -2x^2$ және $y = 2x^2$ функцияларының мәндері – қарама-қарсы сандар. Сондықтан $y = -2x^2$ және $y = 2x^2$ функцияларының графигі абсцисса өсіне қатысты симметриялы болады (3.35-сурет).

Жалпы $a < 0$ болған-



3.35-сурет



3.36-сурет

$y=x^3$ функциясының графигін аламыз (3.36-сурет). Бұл график Oy өсінің оң жағында шектеусіз жоғары қарай өсе береді, ал Oy өсінің сол жақ бөлігінде бұл график шектеусіз төмен қарай жалғаса береді. $y=x^3$ функциясының графигін **кубтық парабола** деп атайды.

- Егер $x=0$ болса, $y=0$. Сондықтан $y=x^3$ функциясының графигі координаталар бас нүктесінен өтеді.

- Егер $x>0$ болса, онда $y>0$, ал егер $x<0$ болса, онда $y<0$. Шынында да, оң санның кубы оң сан, ал теріс санның кубы теріс сан болады. Сондықтан $y=x^3$ функциясының графигі **I және III координаталық ширектерден өтеді**.

x -тің қарама-қарсы мәндеріне y -тің де қарама-қарсы мәндері сәйкес келеді. Шынында да, кез келген x үшін $(-x)^3 = -x^3$ теңдігі орындалады. Онда функция графигіндегі абсциссасының қарама-қарсы нүктелері координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы орналасады.

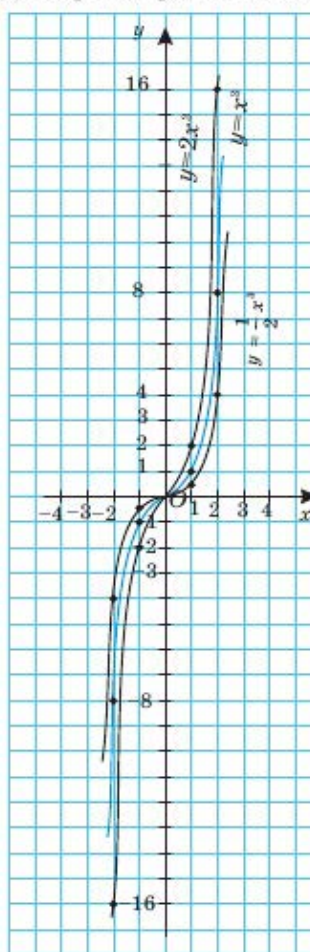
2. $a>1$ болса, $y=ax^3$ функциясының графигі $y=x^3$ -тің графигін Oy өсіне параллель бағытта ордината өсінің оң жағында жоғары қарай, ал сол жағында төмен

қарай a есе «созу» арқылы салынады.

3. Егер $0<a<1$ болса, $y=ax^3$ функциясының графигін салу үшін $y=x^3$ -тің графигін Oy өсіне параллель бағытта абсцисса өсіне қарай $\frac{1}{a}$ есе «сығу» керек. Мысалы, 3.37-суретте $y=2x^3$, $y=x^3$ және $y=\frac{1}{2}x^3$ функцияларының графигі бейнеленген.

Жалпы жағдайда, $a>0$ болса, онда $y=ax^3$ функциясының графигі **I және III координаталық ширектерде жатады**.

4. $a<0$ болса, $y=ax^3$ және $y=|a|x^3$ функцияларының графигі Ox өсіне қатысты симметриялы болатыны түсінікті, яғни $a<0$ болғанда, $y=ax^3$ функциясының графигін салу үшін $y=|a|x^3$



3.37-сурет

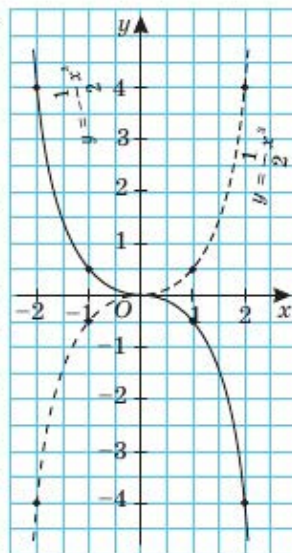
функциясының графигін салып, оны Ox өсіне қатысты симметриялы түрде көшірсе, жеткілікті.

Мысалы, 3.38-суретте $y = -\frac{x^3}{2}$ және $y = \frac{x^3}{2}$ функцияларының графигі бейнеленген.

$a < 0$ болғанда, $y = ax^3$ функциясының графигі II және IV координаталық ширектерде орналасады.



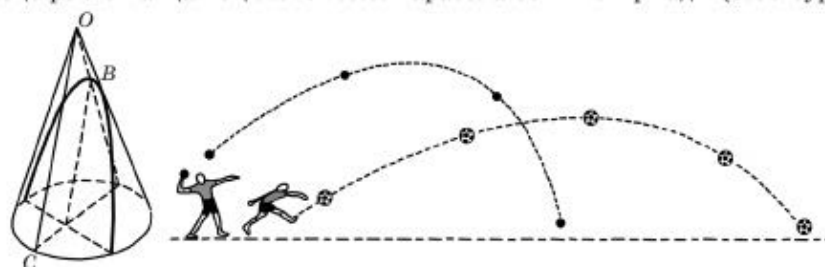
1. $y = x^2$ функциясы графигін пайдаланып, 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$; 3) $a < 0$ болса, $y = ax^2$ функциясының графигін қалай салуға болады?
2. $y = ax^2$ параболасының тармақтары: 1) $a > 0$; 2) $a < 0$ болғанда қалай бағытталған?
3. $y = x^2$ функциясының графигімен салыстырғанда $y = ax^3$ функциясының графигін: 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$; 3) $a < 0$ болғанда қалай салуға болады?
4. $y = ax^3$ функциясының графигі: 1) $a > 0$; 2) $a < 0$ болғанда қай координаталық ширектерде жатады?



3.38-сурет



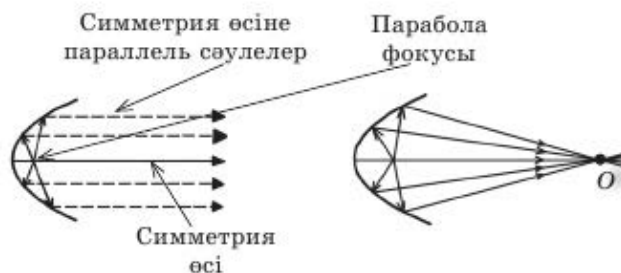
Парабола атауын алғаш рет біздің заманымыздан бұрынғы III ғасырда өмір сүрген ежелгі грек ғалымы Аполлоний өзінің «Конустық қималар» атты еңбегінде енгізген. Параболаның бірқатар тамаша қасиеттері бар. Мысалы, Аполлоний қарастырғандай, суретте көрсетілген тәртіп бойынша конустық бетті CO жасаушысына параллель бағытта жазықтықпен қиып өткен, онда шығатын қима парабола болады. Жер бетінен белгілі бір бұрышпен тебілген футбол добы, лақтырылған тас, зеңбірекпен атқан оқ және т.с.с. парабола бойымен ұшады (3.39-сурет).



3.39-сурет

Парабола қасиеттерін ғылым мен техника саласында да кеңінен қолданады. Мысалы, автомобиль прожекторларының өстік қималары парабола болады. Егер параболаны шағылыстырушы айна деп қабылдасақ, онда параболаның симметрия өсіне параллель сәулелердің барлығы да осы айнадан шағылысып, оның симметрия өсінде орналасатын бір

нүктеде тоғысады (3.40-сурет). Бұл нүктені *параболаның фокусы* деп атайды.



3.40-сурет

Фокус – грекшеден аударғанда «от ошағы» дегенді білдіреді. Сонымен, егер жарық көзін фокуста орналастырсақ, онда парабола «айнасынан» шағылысқан сәуле оның өсіне параллель болады. Бұл қасиетті прожекторларды құрастыру принципіне қолданады. Мұнда прожектор айнасы – параболаны симметрия өсі маңында айналдырғаннан шығатын айналу беті, оны *айналу параболоиды* деп те атайды. Егер жарық көзі өстің бойында фокустан ауытқитын болса, онда шағылысатын сәулелер шашыраңқы немесе бір нүктеде тоғысатын болып келеді. Параболаның бұл қасиеттерін шашыраңқы телесигналдарды қабылдағыш – параболалық антеннаның жұмыс принципіне қолданады.

Жаттығулар

А

- 3.102. $A(2; 4)$, $B(-1; 1)$, $C(1; -1)$, $D(-3; -9)$, $E(5; -25)$, $F(-4; 16)$ нүктелерінің қайсысы $y=x^2$ функциясының графигінде жатады?
- 3.103. $A(3; 27)$, $B(-3; 27)$, $C(-1; 1)$, $D(0; 1)$, $E(-2; -8)$, $F(8; 2)$ нүктелерінің қайсысы $y=x^3$ функциясының графигінде жатады?
- 3.104. m -нің қандай мәндерінде: 1) $A(-3; m)$; 2) $B(m; 25)$ нүктесі $y=x^2$ функциясы графигінде жатады?
- 3.105. m -нің қандай мәнінде: 1) $A(-3; m)$, 2) $B(m; 8)$ нүктесі $y=x^3$ функциясының графигінде жатады?
- 3.106. $A(2; 8)$, $B(-3; 18)$, $C(-3; 9)$ және $D(3; 18)$ нүктелерінің қайсысы $y=2x^2$ функциясының графигінде жатады?
- 3.107. $y=x^2$ функциясының графигі бойынша берілген функциялардың графигін салыңдар.

$$1) y=2x^2 \quad 2) y=\frac{1}{2}x^2 \quad 3) y=-x^2 \quad 4) y=-2x^2 \quad 5) y=-\frac{1}{2}x^2$$

3.108. $A(2; 4)$, $B(-2; 4)$, $C(-2; -4)$ және $D(2; -4)$ нүктелерінің қайсысы:

1) $y = \frac{1}{2}x^3$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^3$ функцияларының графигінде жатады?

3.109. $y=x^3$ функциясының графигі бойынша берілген функциялардың графигін салыңдар.

1) $y=-x^3$ 2) $y=2x^3$ 3) $y=-2x^3$ 4) $y = \frac{1}{2}x^3$ 5) $y = -\frac{1}{2}x^3$

3.110. Аргумент x -тің $-2,1$; $-0,3$; $0,3$; $2,1$ мәндеріне сәйкес келетін:
1) $y=0,4x^2$; 2) $y=-2,5x^2$ функцияларының мәнін табыңдар.

3.111. Аргумент x -тің -2 ; $-0,3$; $0,3$; 2 мәндеріне сәйкес келетін
1) $y=0,5x^3$ және 2) $y=-2x^3$ функцияларының мәнін табыңдар.

В

3.112. Бір координаталар жүйесінде $y=x^2$ және $y=x^3$ ($x>0$) функцияларының графиктерін салып, осы графиктер көмегімен сандарды салыстырыңдар: 1) $0,5^2$ және $0,5^3$; 2) $1,5^2$ және $1,5^3$.

3.113. $y=-x^2$ функциясының графигін салыңдар. Осы график бойынша:

1) $x=0,7$; $-1,3$ мәндеріне сәйкес y -тің мәндерін табыңдар;
2) $y=-2$; 3 мәндеріне сәйкес x -тің мәндерін табыңдар.

3.114. $y=-x^3$ функциясының графигін салыңдар. Осы график бойынша:

1) $x=0,6$; $-1,5$ мәндеріне сәйкес y -тің мәндерін табыңдар;
2) $y=4$; -3 мәндеріне сәйкес x -тің мәндерін табыңдар.

3.115. $y=2x^2$ функциясының мәні: 1) 8-ге; 2) 50-ге тең. Оған сәйкес аргументтің мәндерін табыңдар.

3.116. $y=-2x^3$ функциясының мәні: 1) 54-ке; 2) 128-ге тең. Оған сәйкес аргументтің мәндерін табыңдар.

3.117. a -ның қандай мәндерінде $B(3; a)$ нүктесі берілген функциялардың графигінде жатады?

1) $y=3x^2$ 2) $y=-2x^2$ 3) $y = -\frac{1}{4}x^2$ 4) $y = \frac{1}{5}x^2$

3.118. a -ның қандай мәндерінде $B(2; a)$ нүктесі мына функциялардың

графигінде жатады: 1) $y=2x^3$; 2) $y=-x^3$; 3) $y = -\frac{1}{3}x^3$; 4) $y = \frac{1}{8}x^3$?

3.119. a -ның қандай мәндерінде $y=ax^2$ функциясының графигі: 1) $A(2; 2)$; 2) $B(2; -2)$; 3) $C(-3; 6)$; 4) $D(-3; -6)$; 5) $E(\frac{1}{2}; 1,5)$; 6) $F(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ нүктелері арқылы өтеді?

3.120. a -ның қандай мәндерінде $y=ax^3$ функциясының графигі: 1) $A(2; 2)$; 2) $B(2; -2)$; 3) $C(\frac{1}{3}; \frac{1}{9})$; 4) $D(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ нүктелері арқылы өтеді?

С

3.121. $A(a;b)$ нүктесі: 1) $y=x^2$; 2) $y=x^3$ функцияларының графигінде жататыны белгілі. $B(-a;b)$; $C(a;-b)$; $D(-a;-b)$ нүктелері осы графикке тиісті бола ма?

3.122. Егер: 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$; 3) $-1 < a < 0$; 4) $a < -1$ болса, a , a^2 және a^3 сандарын өсу ретімен жазыңдар.

3.123. $y = x^2$ және $y = x^3$ функциялары графигінің барлық қиылысу нүктелерін табыңдар. Осындай нүктелер нешеу? Олардың координаталарын жазыңдар. x оң болғандағы модулі бойынша ең үлкен куб функция квадрат функцияны «басып озатынын» түсіндіріңдер.

3.124. $y=ax^2$ және $y=bx^3$ функциялары графигінің неше қиылысу нүктесі болуы мүмкін? 1) $a=2$; $b=-2$; 2) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{3}$ болғанда осы қиылысу нүктелерін табыңдар.

3.125. $y=ax$ және $y=bx^2$ функцияларының қиылысу нүктелерін табыңдар. Есепті $a=1$ және $b = \frac{1}{3}$ болғанда шешіп, сәйкес функциялардың графигін салыңдар.

3.126. $y = ax^3$ функциясы берілген. $x = 2$ болғанда, функцияның мәні 16-ға, ал $x = -1$ болғанда, функция мәні -2 -ге тең екені белгілі.

1) a коэффициентін табыңдар, содан соң теңдеуді жазыңдар.

2) Графигін салыңдар және оны қысқаша сипаттаңдар («тармақтары қалай орналасқан», симметрия бар ма?).

3.127. $y=a^2x$ және $y=b^2x^3$ функциялары неше нүктеде қиылысады? Осы нүктелердің координаталарын табыңдар.

3.128. $y=2x$ және $y = \frac{1}{2}x^3$ функцияларының графигін бір координаталық жүйеде салып, олардың қиылысу нүктелерін табыңдар.

3.129. Теңдеулердің графигін салыңдар.

$$1) \frac{y - x^2}{xy} = 0; \quad 2) \frac{4y - x^2}{4 - x^2} = 0; \quad 3) \frac{y - x^3}{y - 8} = 0$$

Қайталауға арналған жаттығулар

3.130. Егер ойдағы санға 8-ді қосып, сол қосындыны екі еселеп, одан 23-ті азайтса, ойдағы сан шығады. Біз қандай сан ойладық?

3.131. Үш тракторшы 65 га жер жырты. Бірінші тракторшы екіншісіне қарағанда 10 га жерді кем жырты, ал үшіншісі бірінші және екінші тракторшылар бірігіп жыртыған жердің 30%-не тең жерді жырты. Әрбір тракторшы неше гектар жер жырты?

3.132. $y = kx - 2$ сызықтық функциясының графигі $A(2; 4)$ нүктесі арқылы өтеді. k -ны табыңдар. Бұл түзу $B(-3; -6)$ нүктесі арқылы өте ме?

3.133. Өрнекті ықшамдаңдар.

$$1) -0,7a^5b \cdot (-2a^3 \cdot b^2)^2 \quad 2) 22a^5 \cdot b^6 : (-2ab^2)^3$$

3.134. Квадрат пішінді қуысты қалап шығу үшін 20 кірпіш қажет болды. Қабырғасы осыдан үш есе үлкен квадрат пішінді қуысты қалап шығу үшін неше кірпіш қажет?

3.135. Салыстырыңдар.

$$1) (0,7)^{20} \text{ және } (-0,7)^{20} \quad 2) -6,4^4 \text{ және } (-6,4)^4 \\ 3) (-2,1)^{19} \text{ және } 2,1^{19} \quad 4) (-0,2)^{15} \text{ және } -0,2^{15}$$

3.136. 70 км/сағ жылдамдықпен автомобиль t сағатта s км жол жүрді. s -тің t -ға тәуелділігін формуламен беріңдер. Осы формуланы пайдаланып, автомобильдің 3 сағатта; 4 сағ 20 минутта қандай жол жүретінін табыңдар.

3.5. $y = \frac{k}{x}$ функциясы және оның графигі

Анықтама. $y = \frac{k}{x}$ функциясын кері пропорционалдық функция деп атайды. Мұндағы x – тәуелсіз айнымалы, k – берілген сан, оны пропорционалдық коэффициент деп атайды.

$y = \frac{k}{x}$ функциясының графигі **гипербола** деп аталады.

$x=0$ -ден өзге сандардың барлығы да $y = \frac{k}{x}$ функциясының анықталу облысына енеді. Себебі әрбір $x \neq 0$ үшін $\frac{k}{x}$ өрнегінің мағынасы бар.

1. $k > 0$ болсын.

$k = \frac{1}{2}$, $k=1$ және $k=2$ болғанда, сәйкес $y = \frac{1}{2x}$, $y = \frac{1}{x}$ және $y = \frac{2}{x}$ функциялары үшін кесте құрайық.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{1}{2x}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$y = \frac{2}{x}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

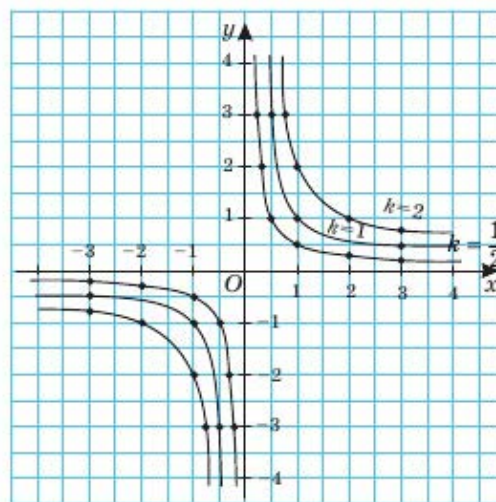
Кестеден x -тің мәні бірнеше есе өссе, оған сәйкес y -тің мәні сонша есе кемитінін (және керісінше) көреміз.

Сонымен бірге x -тің мәні координаталар бас нүктесінен алыстаған сайын функцияның графигі абсцисса

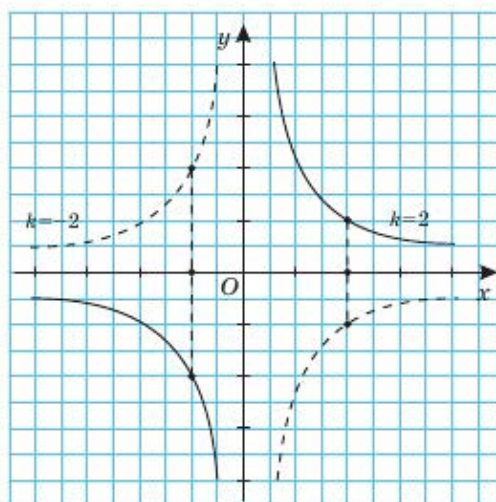
өсіне жақындай түсетінін (бірақ қимайды), ал x -тің мәні 0-ге сол жағынан жақындаған сайын функцияның мәні шексіз кеми беретінін, яғни координаталар бас нүктесінен алшақтай беретінін көреміз (3.41-сурет).

Сонымен, кез келген $k > 0$ үшін $y = \frac{k}{x}$ функциясының графигі I және III координаталық ширектерде орналасады.

3.41-суретте $y = \frac{1}{2x}$, $y = \frac{1}{x}$ және $y = \frac{2}{x}$ функцияларының графигі



3.41-сурет



3.42-сурет

бейнеленген. k саны кіші болған сайын сәйкес $y = \frac{k}{x}$ функциясының графигі координаталар өсіне *жақынырақ* орналасатынын, ал k үлкен болған сайын координаталар өсінен *алшағырақ* орналасатынын көреміз.

2. $k < 0$ теріс сан болсын. Мысал ретінде $y = -\frac{2}{x}$ функциясын қарастырайық. x -тің бірдей мәндерінде $y = -\frac{2}{x}$ және $y = \frac{2}{x}$ функциялары мәндерінің модульдері тең, ал таңбалары қарама-қарсы. Бұл $y = -\frac{2}{x}$ және $y = \frac{2}{x}$ функциялары графигінің нүктелері Ox өсіне қатысты симметриялы болатынын білдіреді (3.42-сурет).

Жалпы, $k < 0$ болғанда $y = \frac{k}{x}$ функциясының графигін салу үшін $y = \frac{|k|}{x}$ функциясының графигін салып, оны Ox өсіне қатысты симметриялы көшірсе, жеткілікті.

$k < 0$ болғанда, $y = \frac{k}{x}$ функциясының графигі II және IV координаталық ширектерге орналасады.

a мен b аралығында анықталған $y=f(x)$ функциясы берілген. Егер $a < x_1 < x_2 < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген x_1, x_2 сандары үшін

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (1)$$

теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын a мен b аралығында **өспелі функция** деп, ал (1) теңсіздіктің орнына

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (2)$$

теңсіздігі орындалса, онда функцияны a мен b аралығында **кемімелі функция** деп атайды.

Анықтама. Егер аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні, ал аргументтің кіші мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келсе, онда **функцияны a мен b аралығында өспелі** деп атайды.

Керісінше, егер аргументтің үлкен мәніне функцияның кіші мәні, ал аргументтің кіші мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда **функция a мен b аралығында кемімелі** деп аталады.



1. Егер: а) $k > 0$; ә) $k < 0$ болса, $y = \frac{k}{x}$ функциясының графигі қай координаталық ширектерде жатады?
2. Егер $0 < k_1 < k_2$ болса, $y = \frac{k_1}{x}$ және $y = \frac{k_2}{x}$ функцияларының графигі қалай орналасады?
3. Өспелі және кемімелі функцияларға мысалдар келтіріңдер.

Жаттығулар

А

3.137. $y = \frac{4}{x}$ функциясы берілген. Кестені толтырыңдар.

x	-4		-1	-0,5		0,25				4
y		-2			-16		8	4	2	

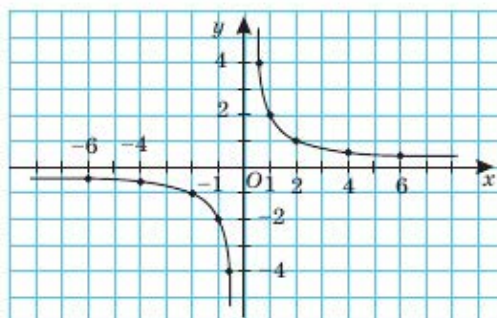
3.138. $A(-0,05; -200)$, $B(-0,1; 100)$, $C(400; 0,25)$ және $D(500; -0,02)$

нүктелері $y = \frac{10}{x}$ функциясының графигінде жата ма?

3.139. 3.43-суреттегі $y = \frac{2}{x}$ функциясының графигін қолдана отырып:

1) $x = -4$; $-\frac{1}{2}$; 2 мәндеріне сәйкес келетін y -тің мәндерін табыңдар.

2) $y = -2$; 0,5; 4 мәндеріне сәйкес келетін x -тің мәндерін табыңдар.



3.43-сурет

3.140. $y = \frac{k}{x}$ кері пропорционалдық функциясының графигі:

1) I және III; 2) II және IV координаталық ширектерде орналасқан деп алып, k -ның таңбасын анықтаңдар.

3.141. Кері пропорционалдық функция $y = -\frac{12}{x}$ түрінде берілген. Кестені толтырыңдар.

x	-600		-12	-0,05	0,5		120	
y		0,1				-1		-0,02

3.142. $y = -\frac{3}{x}$ функциясының графигін салыңдар. График бойынша:

1) $x = -6$; -3; -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 3; 6 мәндеріне сәйкес келетін y -тің мәндерін табыңдар.

2) $y = -\frac{1}{2}$; -1; -2; 2; 1; $\frac{1}{2}$ мәндеріне сәйкес келетін x -тің мәндерін табыңдар.

3.143. Кері пропорционалдық аргументтің 3-ке тең мәніне функцияның 3-ке тең мәні сәйкес келеді. Пропорционалдық коэффициентін табыңдар.

3.144. $y = -\frac{4}{x}$ функциясының графигін салып:

1) функцияның оң мәндер қабылдайтын аралығын;

2) аргументтің мәндері қай аралықта өзгергенде функцияның сәйкес мәндері -4 пен -2 -нің аралығында жататынын анықтаңдар.

3.145. $f(x) = \frac{6}{x}$ функциясының графигін салып, $f(1,5)$; $f(-3)$; $f(3,5)$ мәндерін график бойынша анықтаңдар.

В

3.146. k -ның қандай мәндерінде $y = \frac{k}{x}$ функциясының графигі:

1) $A(3; -6)$; 2) $B(-6; 3)$; 3) $C(4; 4)$; 4) $D(-2; -2)$ нүктелері арқылы өтеді?

3.147. m мен n -нің қандай мәндерінде $A(m; 4)$ және $B(-4; n)$ нүктелері:

1) $y = -\frac{12}{x}$; 2) $y = \frac{8}{x}$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = -\frac{24}{x}$ функцияларының графигінде жатады?

3.148. Графигі: 1) $A(8; 0,125)$; 2) $B\left(\frac{2}{3}; \frac{9}{5}\right)$; 3) $C(-25; -0,2)$ нүктелері арқылы өтетін кері пропорционалдық функцияны табыңдар. Табылған функцияның графигін салыңдар.

3.149. Қабырғалары a -ға және b -ға тең тіктөртбұрыштың ауданы 6 см^2 . b -нің a -ға тәуелділігін формула арқылы өрнектеңдер. Неге бұл тәуелділік кері пропорционалдық болады? Осы функцияның анықталу облысын тауып, графигін салыңдар.

3.150. Автомобиль Тараздан Алматыға дейінгі 500 км қашықтықты $v \text{ км/сағ}$ жылдамдықпен t сағатта жүріп өтеді. v -ні t арқылы өрнектеңдер. Табылған функцияны пайдаланып, жолға: 1) 5 сағ ; 2) 8 сағ ; 3) 10 сағ уақыт жұмсалатындай етіп, автомобильдің орташа жылдамдығын табыңдар.

3.151. Егер функция $f(x) = \frac{1}{x}$ формуласымен берілсе, онда:

1) $f(0,5) - f(1)$; 2) $f(1) - f(1,5)$; 3) $f(1,5) - f(2,5)$ мәндерін табыңдар.

С

3.152. Егер $x > 0$ немесе $x < 0$ болса, онда $f(x) = \frac{k}{x}$ функциясы $k > 0$ болғанда кемімелі, ал $k < 0$ болғанда өспелі болатынын дәлелдеңдер. Төмендегі функциялардың қайсысы өспелі, қайсысы кемімелі болатынын және функция қай координаталық ширектерде орналасатынын анықтаңдар.

$$1) y = \frac{3}{x} \quad 2) y = -\frac{10}{x} \quad 3) y = -\frac{1}{2x} \quad 4) y = \frac{1}{4x}$$

3.153. $y = \frac{k}{x}$ функциясының графигінде координаталары $(4; -2)$ нүктесі белгіленген.

- 1) k коэффициентін табыңдар.
- 2) Осы гиперболаның графигі қай ширектерде орналасқан?
- 3) x -ті $-x$ -ке ауыстырғанда не болатынын мысал арқылы көрсетіп, симметриясы туралы қорытынды жасаңдар.

3.154. $y = \frac{k}{x}$ функциясы берілген. $x > 0$ болғанда, функция тек теріс мәндерді, ал $x < 0$ болғанда, тек оң мәндер қабылдайтыны белгілі.

- 1) k коэффициентінің таңбасы қандай?
- 2) Гипербола координаталары $(0; 2)$ нүктесі арқылы өтетіндей k -ны таңдауға бола ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.155. Сандарды стандарт түрде жазып, олардың мәнді бөлігі мен ретін көрсетіңдер.

$$1) 28\,127\,000\,000 \quad 2) 0,000\,019\,270 \quad 3) \frac{4}{7} \cdot 10^{-5} \quad 4) 182 \cdot 10^7$$

3.156. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) 3,5x - 1,8 = (5,5x + 3,4) - 5,8 \quad 2) (x + 5a) - 17a = 3a - 2x$$

3.157. Сөзбен сипатталған модельді математикалық тілде жазыңдар.

- 1) x және y сандарының қосындысы 17-ге тең.
- 2) Екі санның екі еселенген көбейтіндісі олардың қосындысынан 20-ға артық.

«Функция» бөлімі бойынша тест тапсырмалары

1. $x = -4$ деп алып, $y = x^2$ функциясының мәнін табыңдар.
A) -16 B) 16 C) -8 D) 8
2. Қай функцияның графигі түзу сызық болады?
A) $y = x^2$ B) $y = 3x + 2$ C) $y = \frac{1}{x}$ D) $y = x^2$
3. $f(5) = 7$ жазуы нені білдіреді?
A) $x = 5$ болғанда, функцияның мәні 7-ге тең.
B) $x = 7$ болғанда, функция анықталмайды.
C) $x = 7$ болғанда, функцияның мәні 5-ке тең.
D) Аргумент пен функцияның қосындысы 12-ге тең.
4. Әр оқушының есіміне оның бойы мен салмағы сәйкестендірілген. Осы «Оқушының есімі оның бойы мен салмағына тәуелді» функция бола ала ма?
A) Жоқ, себебі оқушының салмағы өзгеруі мүмкін.
B) Жоқ, себебі бой ұзындығын нақты анықтау мүмкін емес.
C) Иә, себебі әр оқушының белгілі бір уақыттағы нақты бой ұзындығы мен салмағы болады.
D) Жоқ, себебі оқушылар есімі қайталануы мүмкін.
5. Функция кесте арқылы берілген $f(2)$ мәнін табыңдар.

x	-1	0	1	2
y	3	2	-1	1

A) 2 B) 3 C) -1 D) 1
6. $y = ax + b$ сызықтық функцияның графигінде координаталары $(0; 5)$ болатын нүкте ордината өсінде жатыр. a мен b -нің мәндері туралы не айтуға болады?
A) $b = 5$, a – кез келген мәнді қабылдайды. C) $a = 5$, $b = 0$.
B) b белгісіз, a белгісіз. D) $a = 0$, $b = 5$.

7. $y = -2x + 5$ функциясында x -ті бір бірлікке арттырса, онда функция мәні ...
- A) 2-ге артады. B) 2-ге кемиді.
C) 3-ке кемиді. D) 3-ке артады.
8. $y = \frac{k}{x}$ қатынасы $x \neq 0$ болғанда функция бола ала ма?
- A) Жоқ, себебі x -ке бөлуге болмайды.
B) Иә, $x \neq 0$ болса, x -тің кез келген мәніне y -тің бір ғана мәні сәйкес келеді.
C) Жоқ, себебі теңдеуде белгісіз параметр k бар.
D) k -ның мәніне байланысты.
9. $y = ax + b$, ($a \neq 0$) түріндегі сызықтық функция координаталары $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ болатын нүктеде қай өсті қиып өтеді?
- A) Ордината өсін (Oy) қиып өтеді.
B) Абсцисса өсін (Ox) қиып өтеді.
C) Ешбір өсті қиып өтпейді.
D) Тек $b = 0$ болғанда қиып өтеді.
10. Берілген нүктелердің қайсысы $y = x^2 - 1$ функциясының графигінде жатыр?
- A) $(-1; -2)$ B) $(1; 0)$ C) $(2; 3)$ D) $(3; 8)$

4. СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

4.1. Бас жиынтық және таңдама

Статистика элементтерімен сендер төменгі сыныптан таныссыңдар. Соны еске түсірейік.

Статистика – белгілі бір ортақ белгі-қасиеттермен сипатталатын сандық мәліметтерді (деректі) жинақтау, өңдеу, талдау және оның нәтижелерін түсіндірумен айналысатын ғылым саласы.

Айталық, қайсыбір біртекті объектілер жиынына қандай да бір белгілері бойынша статистикалық зерттеулер жүргізу қажет болсын. Мұндай жиынды **бас жиынтық** деп атайды.

Кейде бас жиынтықтың әрбір элементін зерттейді. Мысалы:

- мектептегі барлық 7-сынып оқушыларының математикадан білім деңгейін білу қажет болса, онда әрбір оқушының білімін тексеріп, көрсеткіштерін анықтайды.
- халық санағын жүргізу кезінде де еліміздің әрбір тұрғындарымен кездесіп, оларды есепке алады.

Бас жиынтықтың әрбір элементін зерттеп, оқып-үйрену кейде мүмкін бола бермейді. Мысалы, белгілі бір егістік алқабына егілген дәннің өнімділігін түгел тексеріп шығу мүмкін емес. Бұл жағдайда егістік алқабының (бас жиынтық) кездейсоқ алынған 1 м^2 -інде өніп шыққан дәндерді есептепейді. Осылайша бас жиынтықтың кездейсоқ таңдап алынған бөлігін **кездейсоқ таңдама** немесе **таңдама** деп атайды.

Анықтама. Зерттелетін объектілер жиынтығын **бас жиынтық** деп, ал бас жиынтықтан кездейсоқ таңдап алынған объектілер жиынын **таңдама жиынтығы** немесе жай ғана **таңдама** деп атайды.

1-мысал. Аяқкиім фабрикасының менеджері 7-сыныпта оқитын кездейсоқ алынған 50 ұлдың аяқкиімдері өлшемін сұрастырып, мынадай мәліметтер алды:

38, 36, 36, 37, 34, 40, 39, 35, 35, 37, 37, 38, 39, 38, 38, 37, 40, 38, 37, 36, 37, 38, 37, 38, 34, 33, 39, 39, 34, 40, 35, 38, 37, 36, 39, 36, 40, 40, 35, 33, 39, 34, 36, 37, 38, 38, 36, 37, 35, 39.

Мұнда келтірілген дерек кездейсоқ таңдалып, ал бас жиынтық – еліміздің 7-сыныбында оқитын барлық ұлдың аяқкиімдері өлшемі.

- $n = 50$ – **таңдама көлемі** – ол таңдама құрамына енетін объектілер (элементтер) саны;
- $x_{\min} = 33$ – **таңдаманың ең кіші мәні**;

- $x_{\max} = 40$ – таңдаманың ең үлкен мәні;
- $x_{\max} - x_{\min} = 40 - 33 = 7$ – таңдама құлашы.

Жинақталған деректі өңдеу оңайырақ болу үшін оны белгілі бір тәртіппен ықшамдап алу (өсу не кему ретімен жазу) керек. Мысалы, біз қарастырған мысалдағы аяқкиім өлшемдері көрсеткіштерін өсу ретімен жазайық: 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Анықтама. Таңдамаға енетін мәліметтердің әр түрін өсу тәртібімен жазғанда шығатын тізбекті **ығыспалы қатар** деп, ал ығыспалы қатардағы әрбір элементті **нұсқалық** деп атайды.

Енді ығыспалы қатардағы әрбір нұсқалық таңдамада неше рет қайталанатынын, яғни нұсқалықтың **абсолюттік жиілігін** (немесе абсолюттік жиілік нұсқалығын) анықтайық. Ол үшін *ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін* қолданамыз.

Жалпы жағдайдағы ығыспалы қатардың абсолюттік жиіліктер кестесі:

x_i – нұсқалық элементі	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i – абсолюттік жиілік	n_1	n_2	n_3	...	n_k

x_i (аяқкиім өлшемі)	33	34	35	36	37	38	39	40
n_i (аяқкиім өлшемінің қайталану жиілігі)	2 рет	4 рет	5 рет	7 рет	10 рет	10 рет	7 рет	5 рет

Кестеде $x_1 = 33$ нұсқалығы таңдамада 2 рет, $x_5 = 37 - 10$ рет, т. с. с. кездесетінін көреміз. Бұл сандарды сәйкес **нұсқалықтың абсолюттік жиілігі** деп атайды. Барлық абсолюттік жиіліктің қосындысы таңдама көлеміне тең:

$$n = 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 10 + 7 + 5 = 50.$$

Нұсқалықтың абсолюттік жиілігін таңдама көлеміне бөлгенде шығатын санды осы **нұсқалықтың салыстырмалы жиілігі** деп атайды. Оны әрбір нұсқалық таңдама көлемінің қандай бөлігін (кейде процентпен есептейді) құрайтынын анықтау үшін табады. Салыстырмалы жиілікті ω_i деп белгілейді, $\omega_i = \frac{n_i}{n}$.

Жалпы жағдайдағы ығыспалы қатардың салыстырмалы жиіліктер кестесі:

x_i – нұсқалық	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$ – салыстырмалы жиілік	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

x_i (аяқкиім өлшемі)	33	34	35	36	37	38	39	40
ω_i (сәйкес аяқкиім өлшемінің қайталану жиілігі)	$\frac{2}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{5}{50}$

Мысалы, $x_4 = 36$ нұсқалығының абсолюттік жиілігі $n_4 = 7$, ал салыстырмалы жиілігі $\omega_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{7}{50}$ -ге тең. Барлық салыстырмалы жиіліктің қосындысы 1-ге тең:

$$\frac{2}{50} + \frac{4}{50} + \frac{5}{50} + \frac{7}{50} + \frac{10}{50} + \frac{10}{50} + \frac{7}{50} + \frac{5}{50} = 1.$$

Ескерту! Барлық салыстырмалы жиіліктің қосындысы үнемі 1-ге тең (немесе 100%-ке тең).

Статистиканың мода, медиана, арифметикалық орта мәні сияқты басқа да элементтеріне тоқталайық.

Жиіліктер кестесі бойынша таңдаманың модасы мен медианасын анықтау жеңіл.

Анықтама. Таңдама элементтерінің ішінде ең жиі кездесетін элементті **таңдама модасы** деп атайды. Моданы M_0 деп белгілейді.

Таңдама элементтерін өсу тәртібімен орналастырып, сандар тізбегі түрінде жазамыз.

Анықтама.

- Таңдама көлемі *тақ сан* болса, тізбектің дәл ортасында орналасқан элемент **таңдама медианасы** болады.
- Таңдама элементтерінің саны *жұп* болса, тізбектің ортасындағы екі санның арифметикалық ортасы **таңдаманың медианасы** болады. Медиананы M_e деп белгілейді.

Жоғарыда қарастырған мысалда екі мән мода болады: $M_0 = 37$ және $M_0 = 38$, ал медианасы $M_e = 37$.

Арифметикалық орта мән $\bar{X}$ -ті анықтау үшін әрбір нұсқалықты сәйкес абсолюттік жиіліктеріне көбейтіп, олардың қосындысын таңдама көлеміне бөледі.

$$\bar{X} = \frac{33 \cdot 2 + 34 \cdot 4 + 35 \cdot 5 + 36 \cdot 7 + 37 \cdot 10 + 38 \cdot 10 + 39 \cdot 7 + 40 \cdot 5}{50} = 37,04.$$

Анықтама. Таңдама элементтерінің арифметикалық ортасын таңдаманың орта мәні деп атайды және оны $\bar{X}$ әріпімен белгілейді.

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_i n_i}{n_1 + n_2 + \dots + n_i}$$



1. Статистика саласы нені оқып үйретеді?
2. Бас жиынтық деп нені түсінесіңдер?
3. Кездейсоқ таңдама деген не? Оның көлемі деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
4. Ығыспалы қатар, нұсқалық деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
5. Нұсқалықтың абсолюттік жиілігі, салыстырмалы жиілігі деп нені айтады? Мысал келтіріңдер.
6. Таңдаманың арифметикалық орта мәні, құлашы, көлемі, модасы мен медианасы қалай анықталады? Мысал келтіріңдер.



«Статистика» термині латынның *status* (статус) сөзінен шыққан және «күй», «хал-жағдай» деген мағынаны білдіреді. Табиғи-әлеуметтік құбылыстарды сан арқылы немесе сандар қатынасы арқылы сипаттау мәселесі XVII ғасырдың екінші жартысында пайда болды. Жалпы Бернуллі, Лаплас, Пуассон, Чебышев, Марков сынды ғалымдардың ықтималдық теориясы саласына қосқан еңбектерінен соң, статистикалық мәліметтерді ықтималдықтар теориясы тұрғысынан зерттеу жұмыстарын жүргізуге кең мүмкіндіктер ашылды. Осылайша, жалпы мағынадағы статистика ұғымынан математикалық статистика ұғымы бөлініп шықты. Ал XIX ғасырда статистика тәсілдері жаратылыстану ғылымдарына да кең көлемде ене бастады. Бүгінде математикалық статистика тәсілдерін қолданбайтын бірде-бір ғылым, техника, халық шаруашылығы және саяси-әлеуметтік саланы атап көрсету мүмкін емес.



Сөйлем ұзындығы деп оның құрамына енетін сөздер мен тыныс белгілері санының қосындысын айтады.

«Абай жолы» романының (I том) 100 – 101-бетіндегі сөйлемдер ұзындығын есептеп, олардың көмегімен: 1) ығыспалы қатардың жиіліктер (салыстырмалы жиіліктер) кестесін құрыңдар; 2) таңдама құлашын табыңдар; 3) таңдаманың модасы мен медианасын анықтаңдар; 4) арифметикалық орта мәнін табыңдар.

Жаттығулар

А

- 4.1–4.6-есептерде берілген таңдаманың абсолюттік жиіліктер немесе салыстырмалы жиіліктер кестесі бойынша таңдаманың: 1) арифметикалық орта мәнін; 2) модасы мен медианасын табыңдар.

4.1.

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

4.2.

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

4.3.

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

4.4.

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

4.5.

x_i	2	4	5	7	10
ω_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

4.6.

x_i	1	4	5	8	9
ω_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

- 4.7. Сөздің ұзындығы деп оның құрамына енетін әріптер санын айтады. Қазақстан Гимніндегі сөздер ұзындығынан құралған:
1) ығыспалы қатардың жиіліктер кестесін; 2) салыстырмалы жиіліктер кестесін; 3) таңдама көлемі мен құлашын; 4) арифметикалық орта мәнін; 5) модасы мен медианасын табыңдар.

В

- 4.8. Өздеріңнің әрбір пәннен II тоқсанда алған бағаларыңды тізіп жазып, олардың әрқайсысы бойынша: 1) абсолюттік жиіліктер кестесін; 2) салыстырмалы жиіліктер кестесін; 3) арифметикалық орта мәнін табыңдар.
- 4.9. Абсолюттік жиіліктер кестесі берілген.

x_i	-5	2	3	4
n_i	4	3	1	n_4

Таңдаманың арифметикалық орта мәні $\bar{X} = -0,3$ болса, онда ω_4 пен таңдама көлемі неге тең?

- 4.10. Кездейсоқ шаманың салыстырмалы жиіліктер кестесі берілген. Егер $\bar{X} = 1,1$ болса, ω_4 пен x_4 -ті табыңдар.

x_i	-2	-1	1	x_4
ω_i	0,3	0,1	0,2	ω_4

- 4.11. Кездейсоқ шаманың салыстырмалы жиіліктер кестесі берілген. Егер $\bar{X} = 4,2$ болса, x_2 мен ω_4 -ті табыңдар.

x_i	2	x_2	5	7
ω_i	0,2	0,3	0,3	ω_4

- 4.12. x_2 -нің қандай мәндерінде кестедегідей заңдылықпен үлестірілген x кездейсоқ шама үшін $\overline{X} = 3,8$ теңдігі орындалады?

x_i	0	x_2	4	6
ω_i	0,2	0,1	0,3	0,4

- 4.13–4.14-есептерде берілген таңдама бойынша: 1) абсолюттік жиіліктер кестесін; 2) салыстырмалы жиіліктер кестесін; 3) арифметикалық орта мәнін; 4) модасы мен медианасын табыңдар.

- 4.13. 42 42 41 49 42
 41 49 42 41 42
 45 42 42 41 49
 40 45 41 44 44
 41 45 42 43 43

- 4.14. 55 56 56 58 57
 59 57 58 56 58
 58 56 59 57 59
 57 55 56 59 57
 56 58 56 59 59

- 4.15. Балалардың «Алгебра» пәні бойынша тоқсандық қорытынды бағалары мынадай:
 Айжан – 4, 4, 5, 5, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5;
 Данияр – 5, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5;
 Еркебұлан – 5, 5, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 5.
 Әр оқушының бағаларын қолданып, ығыспалы қатар құрыңдар.
 Әр оқушының тоқсандық орташа бағасын есептеп табыңдар.
 Әр қатардың модасы мен медианасын анықтаңдар. Оқушылардың әрқайсысы тоқсан соңында қандай баға алуы мүмкін?

C

- 4.16*. Көлемі 10-ға тең таңдама құрамында екі элемент бар: x_1, x_2 . Мұнда $x_1 < x_2$ және x_1 элементінің абсолюттік жиілігі 6-ға тең. Егер $\overline{X} = 1,4$, ал $M_0 = 1$ болса, x_1 мен x_2 -ні табыңдар.

4.17*. Таңдама екі түрлі мән қабылдайды: x_1 және x_2 ($x_1 < x_2$). Мұнда x_1 элементінің салыстырмалы жиілігі 0,2-ге тең. Егер $\bar{X} = 2,6$, $M_0 = 6,7$ болса, x_1 мен x_2 -ні табыңдар.

4.18. Метеоролог журналында сағат 9-дан кешкі 21-ге дейінгі әрбір 3 сағ сайын ауа температурасының мәндері тіркелген мәліметтер мынадай болды:

Уақыт, сағ	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00
Температура, °C	6	10	18	12	9

Бұл кесте абсолюттік немесе салыстырмалы жиіліктер кестесі бола ма? Жауаптарыңды негіздеңдер. Абсолюттік жиіліктер кестесі бойынша ауа температурасының арифметикалық орта мәнін және таңдама көлемін анықтаңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

4.19. Мектептегі ұлдар саны 806-ға тең және олар мектептегі барлық оқушының 52%-ін құрайды. Мектептегі қыздар санын табыңдар.

4.20. Бірмүшелерді стандарт түрге келтіріңдер.

$$1) (2x^2)^3 \cdot \frac{x^2}{4} \quad 2) (-3a^4)^5 \cdot \frac{a^3}{27}$$

4.21. Сызықтық функцияның графигі $y = 2x$ түзуіне параллель және $M(-1; 2)$ нүктесі арқылы өтеді. Осы функцияны формула арқылы жазыңдар.

4.2. Абсолюттік жиіліктер мен салыстырмалы жиіліктер алқабы

Алдыңғы тақырыпта сендер статистикалық мәліметтерді (деректі) ығыспалы қатардың жиіліктер кестесі немесе салыстырмалы жиіліктер кестесі түрінде жазуды үйрендіңдер. Енді бұл деректі график түрінде көрсетейік.

Абсолюттік (салыстырмалы) жиіліктер алқабы берілген нүктелерді қосатын *сынық сызықты* білдіреді (4.1-сурет). Мұндай алқаптарды тұрғызу үшін нұсқалықтарды абсцисса өсіне, абсолюттік (салыстырмалы) жиіліктерді ордината өсіне өлшеп саламыз. Содан соң координаталық жазықтықта сәйкес нүктелерді кесінділермен тізбектеп қосамыз. Шыққан фигура **абсолюттік (салыстырмалы) жиіліктер алқабы** деп аталады.

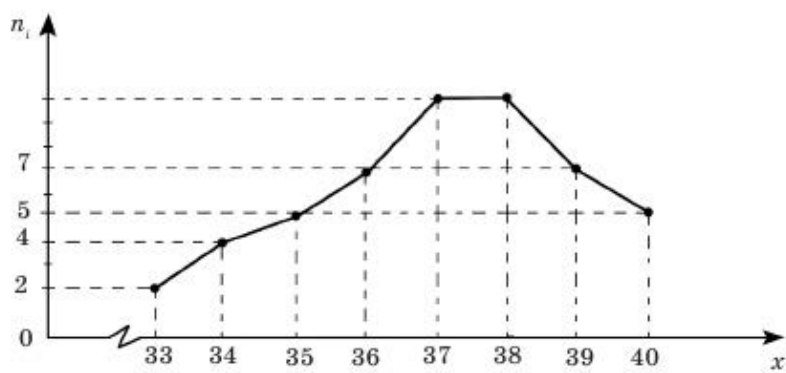
Сонымен, ығыспалы қатардың жиіліктер алқабын тұрғызу үшін, алдымен ығыспалы қатардың абсолюттік және салыстырмалы жиіліктер кестесін қолданамыз.

Алдыңғы тақырыптың 1-мысалында келтірілген таңдаманың жиіліктер кестесі бойынша оның жиіліктер алқабын тұрғызайық (4.1 және 4.2-суреттер).

Ығыспалы қатардың абсолюттік жиіліктер кестесі мынадай болған:

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
n_i	2	4	5	7	10	10	7	5

Абсолюттік жиіліктер алқабы

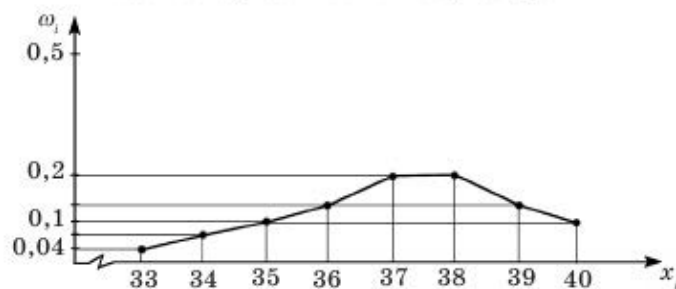


4.1-сурет

Ығыспалы қатардың салыстырмалы жиіліктер кестесі мынадай болған:

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
ω_i	$\frac{2}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{5}{50}$

Салыстырмалы жиіліктер алқабы

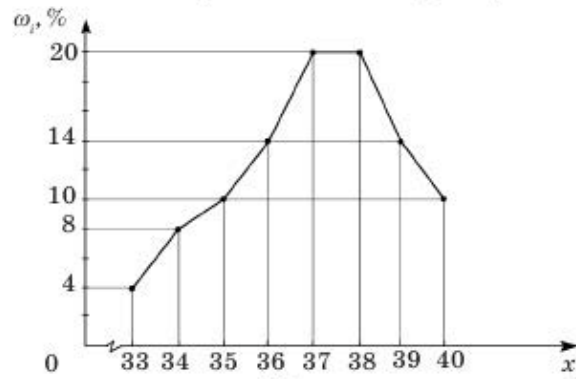


4.2-сурет

Кейде салыстырмалы жиіліктерді процентпен өлшейді. Бұл мысалда процентпен берілген салыстырмалы жиіліктер кестесі былай жазылады:

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
$\omega_i, \%$	4	8	10	14	20	20	14	10

Салыстырмалы жиіліктер алқабы



4.3-сурет

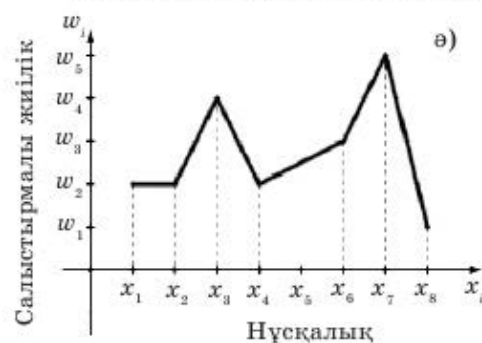
Жалпы жағдайдағы абсолюттік және салыстырмалы жиіліктер кестесі мен жиіліктер алқабы төмендегідей:

Нұсқалық	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...	x_i
Абсолюттік жиілік	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	...	n_i
Салыстырмалы жиілік	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	$\frac{n_4}{n}$	$\frac{n_5}{n}$	$\frac{n_6}{n}$	...	$\frac{n_i}{n}$

Абсолюттік жиіліктер алқабы



Салыстырмалы жиіліктер алқабы



4.4-сурет

Жалпы жиіліктер алқабы арқылы таңдама элементтерінің шамамен қандай заңдылықпен үлестірілгенін білеміз, сондай-ақ жиіліктер алқабынан статистикалық элементтерді көріп, қандай да бір тұжырым жасауға болады.

Ескерту! Жиіліктер алқабын тұрғызу барысында асцисса және ордината өстеріндегі масштаб бірліктері әртүрлі болуы мүмкін. Өйткені бұл өстерде белгіленетін мәндер мағынасы әртүрлі.



1. Ығыспалы қатардың абсолюттік (салыстырмалы) жиіліктер алқабы деген не? Оны қалай салады?
2. Салыстырмалы жиіліктерді процент есебімен қалай анықтайды?
- 3.3 4.1–4.3-суреттерде келтірілген жиіліктер мен салыстырмалы жиіліктер алқабының ұқсастығы мен айырмашылығы қандай? Оны қалай түсіндіруге болады?



Алдыңғы тақырыптағы 4.7-есептегі Қазақстан Гимні мәтініндегі сөздер ұзындығынан құралған ығыспалы қатардың жиіліктер алқабын компьютерде Excel бағдарламасы көмегімен салыңдар. Оны келесі тәртіппен орындауға болады:



1. Excel бағдарламасын ашамыз.
2. MS Excel-де жиіліктер алқабын салу тәсілін көрсетеміз.
3. Кестеден екі бағанды бөліп аламыз: біріншісінде нұсқалық мәндері (x_i) және келесісіне салыстырмалы жиіліктер (n_i) жазылады. Енді батырманы басып, арнайы модуль – *Мастер диаграммасын шығарамыз*. Ол бізге төмендегідей 4 сұрақ қояды.
 - 1) График түрін анықтаңыз (мәндері кесінді арқылы қосылған нүктелік диаграмма).
 - 2) Бастапқы деректі көрсетіңіз (олар жазылып қойған: x_i – нұсқалықтар, n_i – сәйкес жиіліктер).
 - 3) Безендірудің қосымша параметрін беруге болады (бермесе де болады).
 - 4) Диаграмманы қоятын жерді көрсету (көрсетілмеген жағдайда осы бетте салынады). Жиіліктер алқабы дайын.

Жаттығулар

А

4.22–4.27-есептерде берілген ығыспалы қатардың жиіліктер алқабын және %-пен алынған салыстырмалы жиіліктер алқабын салыңдар.

4.22.

x_i	2	5	7	9
n_i	1	3	4	2

4.23.

x_i	4	5	6	7
n_i	4	3	2	1

4.24.

x_i	2	4	5	7
n_i	10	15	5	20

4.25.

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

4.26.

x_i	2	4	6	8	10
ω_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

4.27.

x_i	1	3	5	7	9
ω_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

4.28–4.35-есептерде берілген таңдамалық деректі Excel бағдарламасы көмегімен өңдеп, оның жиіліктер алқабын салыңдар. Құлашын, ең үлкен ($x_{\max}$) және ең кіші ($x_{\min}$) нұсқалығын табыңдар.

4.28.

42	42	41	49	42
41	49	42	41	42
45	42	42	41	49
40	45	41	44	44
41	45	42	43	43

4.29.

55	56	56	58	57
59	57	58	56	58
58	56	59	57	59
57	55	56	59	57
56	58	56	59	59

B

4.30.

45	56	66	42	61	53	62	71	49	62
59	53	57	46	57	71	49	61	51	72
53	46	59	53	59	43	62	52	51	69
51	65	56	39	57	60	59	51	59	69
56	57	44	59	51	51	48	62	53	67
48	62	51	51	59	56	57	46	57	59

51	61	47	56	48	64	51	58	62	66
51	56	59	42	56	57	51	48	61	62
59	48	63	49	53	64	59	63	51	67
56	50	58	53	46	65	49	59	56	58

4.31.	30	52	72	25	62	45	65	82	39	56
	58	45	55	32	55	82	38	63	43	84
	46	32	58	45	58	26	65	45	62	78
	42	70	52	38	55	60	58	43	58	69
	52	55	28	58	43	42	35	64	46	75
	35	64	43	42	58	52	55	32	55	59
	43	62	34	52	37	68	42	56	65	72
	42	52	58	25	52	55	43	35	62	65
	58	36	66	38	46	68	58	64	43	74
	52	41	45	47	32	69	39	58	52	56

4.32.	169	154	143	155	113	155	171	168	153	136
	145	168	122	163	117	165	132	159	107	125
	146	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	151	157	178	149	195	145	166	182	135	136
	163	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	168	157	143	179	165	159	149	141	102	169
	179	177	162	149	146	113	151	152	143	157
	163	169	155	152	175	177	131	154	174	182
	145	153	162	142	173	174	168	153	185	168
	168	167	141	148	152	158	152	155	184	181

4.33. Кездейсоқ шаманың бас жиынтығынан мынадай таңдама алынған:

- 1) 2, 1, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 5, 4, 2, 3.
- 2) 4, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 6.

а) Таңдама көлемін табыңдар; ө) абсолюттік жиіліктің ығыспалы қатарын жазыңдар; б) абсолюттік жиіліктер алқабын салыңдар.

Көмек. ө) Мысалы, 10 баланың әрқайсысы бір айда қанша кітап оқығанын жазғанда, нәтижесінде келесідей мәлімет алынды:

1-бала	2-бала	3-бала	4-бала	5-бала	6-бала	7-бала	8-бала	9-бала	10-бала
3 к.	2 к.	4 к.	3 к.	2 к.	5 к.	3 к.	4 к.	2 к.	3 к.

1-қадам. Алдымен берілген таңдамадағы мәндерді өсу ретімен жазып, ығыспалы қатар құрамыз: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

2-қадам. Кестеге абсолюттік жиіліктің ығыспалы қатарын жазамыз. Сонда 3 баланың әрқайсысы 2 кітаптан, 4 баланың әрқайсысы 3 кітаптан, 2 баланың әрқайсысы 4 кітаптан және 1 бала 5 кітап оқыған:

Нұсқалық (оқылған кітап саны)	Абсолюттік жиілік (осынша кітап оқыған оқушы саны)
2 к.	3 рет
3 к.	4 рет
4 к.	2 рет
5 к.	1 рет

Жауабы: кестеде берілді.

4.34. Қандай да бір кездейсоқ шаманың бас жиынтығынан мынадай таңдама алынған: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4.
а) Таңдама нұсқалығын жазыңдар; ө) таңдаманың көлемін анықтаңдар; б) абсолюттік жиіліктің ығыспалы қатарын жазыңдар; в) жиіліктер алқабын салыңдар.

4.35. Қандай да бір кездейсоқ шаманы зерттеу барысында 40 тәуелсіз бақылау нәтижесі төмендегідей болды.

10	13	10	9	9	12	12	6	7	9
8	9	11	9	14	13	9	8	8	7
10	10	11	11	11	12	8	7	9	10
14	13	8	10	9	7	10	9	8	12

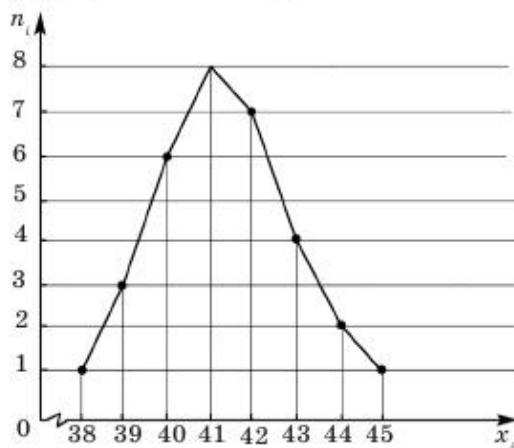
а) Таңдама нұсқалығын жазыңдар; ө) салыстырмалы жиіліктің нұсқалық қатарын жазыңдар; б) жиіліктер алқабын салыңдар.

С

4.36. Көлемі 10-ға тең таңдаманың арифметикалық ортасы 25-ке тең. Таңдаманың ең кіші мәні 7-ге тең және өзге нұсқалықтардан әлдеқайда

кіші. Сондықтан бұл мән таңдама құрамынан алынып тасталды. Енді қалған мәндердің арифметикалық орта мәні қандай болды?

- 4.37. Таңдама көлемі 15-ке, ал арифметикалық орта мәні 220-ға тең. Егер бұл таңдамаға 252-ге тең нұсқалықты қосатын болсақ, онда оның арифметикалық орта мәні қалай өзгереді?
- 4.38. Мұзда мәнерлеп сырғанау жарысында спортшыға 10 әділқазы мүшелері қойған бағалардың арифметикалық орта мәні 5,4-ке тең болды. Ереже бойынша ең кіші және ең үлкен бағаны алып тастап, қалған бағалардың арифметикалық орта мәні алынады. Бұл сан да 5,4-ке тең болып шықты. Сонда алынып тасталған бағалау қосындысының мәні неге тең?
- 4.39. 4.5-суретте аяқкиім дүкенінде бір күнде сатылған ерлер аяқкиімі өлшемдері бойынша жиіліктер алқабы салынған. Осы сурет бойынша: 1) таңдама көлемін; 2) жиіліктің және салыстырмалы жиіліктің ығыспалы қатарын; 3) таңдама құлашын; 4) модасы мен медианасын; 5) арифметикалық орта мәнін табыңдар.



4.5-сурет

Қайталауға арналған жаттығулар

- 4.40. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) \ x - \frac{x-2}{4} = \frac{x}{6} - 3$$

$$2) \ 0,23 = \frac{5-2x}{8} \cdot 4,6.$$

- 4.41. Бір координаталар жүйесінде $y = 2 - x$ және $y = x^2$ функцияларының графигін салып, олардың қиылысу нүктелерін график бойынша анықтаңдар.

**«Статистика элементтері»
бөлімі бойынша тест тапсырмалары**

1. Экологиялық жоба аясында оқушылар бір күн бойы жол бойындағы шудың деңгейін өлшеп (децибел есебімен (дБ)), нәтижесінде мынадай мәліметтер алды: 55, 60, 65, 70, 65, 60, 55, 75, 80, 65. Осы мәліметтер қатарының (таңдаманың) модасын табыңдар.
 А) 60 дБ В) 65 дБ
 С) 70 дБ D) 75 дБ
2. Он күндегі ауа райын зерттеу нәтижесінде ауа ылғалдылығының көрсеткіштері (процент есебімен) мынадай болды: 70, 65, 80, 75, 65, 60, 75, 80, 65, 85. Осы мәліметтер қатарының (таңдаманың) медианасын табыңдар.
 А) 70% В) 72,5%
 С) 75% D) 77,5%
3. Оқушы бақылау жұмысына дайындық кезінде апта сайынғы жинаған балдарын жазып отырды. Олар: 5, 8, 7, 10, 8, 9. Осы қатардың ішінен оқушы ең үлкен сан мен ең кіші санды сызып тастады. Қалған сандар қатарының медианасын табыңдар.
 А) 8 В) 7
 С) 8,5 D) 9
4. Кәсіпорын күн сайын шығарылатын бөлшектерді санап, апта соңында мынадай есеп берді: 120, 130, 150, 140, 150, 160, 120. Осы мәліметтер бойынша таңдама құлашын табыңдар.
 А) 30 В) 40
 С) 50 D) 60

- 137

5. ҚЫСҚАША КӨБЕЙТУ ФОРМУЛАЛАРЫ

5.1. Екі өрнектің қосындысының квадраты және айырмасының квадраты

5.1.1. Екі өрнектің қосындысының квадраты. Көпмүшені көпмүшеге көбейтуді кейбір жағдайда ықшамдап орындауға болады. Көпмүшелерді көбейтудің осы дербес жағдайларын өрнектейтін формулаларды **қысқаша көбейту формулалары** деп атайды.

a және b өрнектерінің қосындысын квадраттайық:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

яғни біз

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

теңбе-теңдігінің ақиқаттығын дәлелдедік. (1) формуланы **екі өрнектің қосындысының квадраты формуласы** деп атайды.

Екі өрнектің қосындысының квадраты бірінші өрнектің квадратына екі еселенген бірінші және екінші өрнектердің көбейтіндісі мен екінші өрнектің квадратын қосқанға тең.

5.1.2. Екі өрнектің айырмасының квадраты. Енді $a-b$ айырмасын квадраттайық:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Сонымен,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

теңбе-теңдігі орындалады. Бұл формуланы **екі өрнектің айырмасының квадраты формуласы** деп атайды.

Екі өрнектің айырмасының квадраты бірінші өрнектің квадратынан екі еселенген бірінші және екінші өрнектердің көбейтіндісін азайтып, екінші өрнектің квадратын қосқанға тең.

Екі өрнектің қосындысы мен айырмасы квадратының формулаларын біріктіре отырып, былай жазады:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

1-мысал. а) $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

ә) $(2a - 7b)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 7b + (7b)^2 = 4a^2 - 28ab + 49b^2$

2-мысал. $(2a + 9)^2 - a(4a + 31)$ өрнегін ықшамдайық.

$$(2a + 9)^2 - a(4a + 31) = 4a^2 + 36a + 81 - 4a^2 - 31a = 5a + 81$$

(1) және (2) формулалардың көмегімен «дөңгелек» сандарға жақын сандардың квадратын есептеген ыңғайлы.

3-мысал. а) $51^2 = (50 + 1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$

$$\text{ә) } 79^2 = (80 - 1)^2 = 6400 - 160 + 1 = 6241$$

(1) және (2) формулаларды кері тәртіппен, яғни

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ және } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

түрінде де жиі қолданады. Қосынды мен айырма квадраттарының формулаларын көбіне көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеу үшін қолданады.

4-мысал. Көпмүшелерді көбейткіштерге жіктейік.

а) $9a^2 - 12ab + 4b^2$

ә) $100 + 40p + 4p^2$

б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - ax + 2ay$

Шешуі.

а) $9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = (3a - 2b)^2$

ә) $100 + 40p + 4p^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2p + (2p)^2 = (10 + 2p)^2$

б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - ax + 2ay = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 - a(x - 2y) = (x - 2y)^2 - a(x - 2y) = (x - 2y)(x - 2y - a)$

5-мысал. $2x^2 + 2y^2 + 13z^2 - 2xy + 4xz - 6yz$ көпмүшесі оның құрамындағы айнымалылардың кез келген сандық мәндері үшін теріс емес мән қабылдайтынын дәлелдеу керек.

Шешуі.

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2y^2 + 13z^2 - 2xy + 4xz - 6yz = \\ & = \overbrace{x^2 - 2xy + y^2} + \overbrace{x^2 + 4xz + 4z^2} + \overbrace{y^2 - 6yz + 9z^2} = (x - y)^2 + (x + 2z)^2 + (y - 3z)^2. \\ & (x - y)^2 + (x + 2z)^2 + (y - 3z)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

6-мысал. Квадрат пішінді жер учаскесінің бір «қабырғасы» $(a+5)$ метрге тең. Қожайын жер учаскесінің әр «қабырғасын» 2 метрге созбақшы болды. Сонда жер учаскесінің ауданы неше квадрат бірлікке өседі?

Шешуі. Берілген жер учаскесінің ауданы мынаған тең: $(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$. Квадрат пішінді жер учаскесінің ұзындығын былай табады: $(a+5)+2=a+7$.

Олай болса, жаңа жер учаскесінің ауданы: $(a+7)^2 = a^2 + 14a + 49$.

Сонымен, $(a^2 + 14a + 49) - (a^2 + 10a + 25) = a^2 + 14a + 49 - a^2 - 10a - 25 = 4a + 24$.

Жауабы: жаңа жер учаскесінің ауданы $(4a+24)$ квадрат метрге өседі.



1. Қысқаша көбейту формулалары деп нені айтады?
2. Екі өрнектің қосындысының квадратының ережесін айтыңдар.

3. Екі өрнектің қосындысының квадратының формуласын жазыңдар.
4. Екі өрнектің айырмасының квадратының ережесін айтыңдар.
5. Екі өрнектің айырмасының квадратының формуласын жазыңдар.
6. (1) және (2) формулаларды дәлелдендер.

Жаттығулар

А

5.1. Көпмүше түріне келтіріңдер.

- | | | |
|---------------|---------------|------------------------|
| 1) $(m+4)^2$ | 2) $(c-b)^2$ | 3) $(x+y)^2$ |
| 4) $(p-q)^2$ | 5) $(a-3)^2$ | 6) $(b+4)^2$ |
| 7) $(2x-y)^2$ | 8) $(-2-a)^2$ | 9) $(\frac{1}{2}+b)^2$ |
| | | 10) $(0,3-y)^2$ |

5.2. Көпмүшелерді түрлендіріңдер.

- | | | | |
|----------------|---------------|---------------|-----------------|
| 1) $(x-1)^2$ | 2) $(3a-b)^2$ | 3) $(5z+t)^2$ | 4) $(5x-2y)^2$ |
| 5) $(6m-4n)^2$ | 6) $(x+c)^2$ | 7) $(a-4)^2$ | 8) $(0,2a+b)^2$ |

5.3. Өрнектерді түрлендіріңдер.

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ | 2) $\left(b + \frac{1}{3}\right)^2$ | 3) $\left(a - \frac{1}{5}\right)^2$ |
| 4) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)^2$ | 5) $\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right)^2$ | 6) $\left(2\frac{1}{3}m + 1\frac{1}{2}n\right)^2$ |
| 7) $\left(5m - \frac{n}{2}\right)^2$ | 8) $\left(9p - \frac{q}{3}\right)^2$ | |

5.4. Көпмүше түріне келтіріңдер.

- | | | | |
|-----------------|--|--|--------------------------------------|
| 1) $(-a+2)^2$ | 2) $(-b-3)^2$ | 3) $(-n+4)^2$ | 4) $(-x-10)^2$ |
| 5) $(-2x-3y)^2$ | 6) $\left(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)^2$ | 7) $\left(-1\frac{1}{3}x - 6\right)^2$ | 8) $\left(-c + \frac{b}{4}\right)^2$ |

5.5. Есептеңдер.

- | | | |
|------------------------|-------------|------------|
| 1) $101^2 = (100+1)^2$ | 2) 31^2 | 3) 51^2 |
| 4) $39^2 = (40-1)^2$ | 5) 103^2 | 6) 99^2 |
| 7) 999^2 | 8) 1001^2 | 9) 105^2 |

5.6. Екімүшенің квадраты түрінде жазыңдар.

- | | | |
|------------------|----------------|----------------|
| 1) $x^2+2xy+y^2$ | 2) a^2+2a+1 | 3) b^2-6b+9 |
| 4) $c^2-10c+25$ | 5) $4m^2+4m+1$ | 6) $16-8c+c^2$ |

5.7. Екімүшенің квадраты түрінде жазыңдар.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $9a^2 - 24ab + 16b^2$ | 2) $4c^2 + 12c + 9$ |
| 3) $25x^2 + 10x + 1$ | 4) $81x^2 - 18xy + y^2$ |
| 5) $m^2 + 4n^2 - 4mn$ | 6) $100a^2 + b^2 + 20ab$ |

5.8. Екімүшенің квадраты түрінде жазыңдар.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| 1) $1 + a^2 - 2a$ | 2) $4xy + y^2 + 4x^2$ |
| 3) $28ab + 49a^2 + 4b^2$ | 4) $10mn + 100m^2 + 0,25n^2$ |
| 5) $\frac{1}{4}a^2 + 4b^2 - 2ab$ | 6) $8ab + b^2 + 16a^2$ |

5.9. Вос орынды берілген өрнек екімүшенің квадраты түріне келетіндей етіп, тиісті өрнекпен толтырыңдар.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) $\square + 2ac + c^2$ | 2) $m^2 - \square + n^2$ | 3) $x^2 - 4xy + \square$ |
| 4) $a^2 + 2ca + \square$ | 5) $\square + 14c + 49$ | 6) $k^2 - \square + 9$ |

5.10. Өрнектердің мәнін табыңдар.

- 1) $a^2 - 2a + 1$, мұндағы $a = 101, -9; 31; 0,4$
 2) $x^2 + 4x + 4$, мұндағы $x = 98, -32; -2,5$

B

5.11. Көпмүше түріне келтіріңдер.

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $(0,2a - 5y)^2$ | 2) $(0,3x + 4y)^2$ | 3) $(1,3m + 2,5n)^2$ |
| 4) $\left(\frac{3}{4}x - 0,5y\right)^2$ | 5) $\left(1\frac{2}{3}c + 0,6\right)^2$ | 6) $\left(\frac{5}{6}p - \frac{3}{5}q\right)^2$ |

5.12. Көпмүшеге түрлендіріңдер.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| 1) $(x^2 + 3y)^2$ | 2) $(0,3a^2 + 4b)^2$ | 3) $(0,2m^2 - 5n)^2$ |
| 4) $(1,3p^3 + 2,5p^2)^2$ | 5) $(2,4c^3 - 1,5d^2)^2$ | 6) $(7x^2y + 3xy^2)^2$ |

5.13. Өрнектерді түрлендіріңдер.

- | | | |
|---|--|--------------------|
| 1) $\left(\frac{3}{4}a^2 - 0,5b^3\right)^2$ | 2) $\left(1\frac{2}{3}x^2 + 0,6y^4\right)^2$ | 3) $(b^n - b)^2$ |
| 4) $(x^m - x)^2$ | 5) $(c^{k+1} + c^k)^2$ | 6) $(a^m + b^n)^2$ |

5.14. Екімүшенің квадраты түріне келтіріңдер.

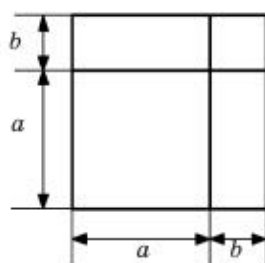
- | | | |
|---------------------------|------------------------------|--|
| 1) $25x^2 + 49y^2 - 70xy$ | 2) $\frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$ | 3) $\frac{25}{36}m^2 - mn + \frac{9}{25}n^2$ |
|---------------------------|------------------------------|--|

$$4) \frac{1}{16}c^4 + 2c^2x + 16x^2 \quad 5) 0,01a^4 + b^2 - 0,2a^2b \quad 6) b^8 - a^2b^4 + \frac{1}{4}a^4$$

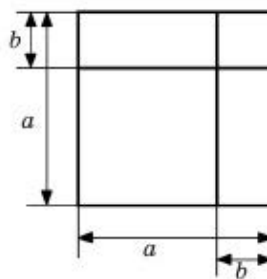
5.15. Үшмүшені екімүшенің квадраты түріне келтіруге бола ма?

$$\begin{array}{lll} 1) a^2 - 2a + 4 & 2) 9m^2 + 100n^2 - 60mn & 3) 4a^2 + b^2 - 4ab \\ 4) 81p^2 - 72pq - 16q^2 & 5) 9x^8 + 4y^2 - 12x^4y & 6) a^2b^4 - 2ab^2x^4 + x^8 \end{array}$$

5.16. 5.1-суретті пайдаланып, a және b оң сандары үшін $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ формуласының геометриялық мағынасын түсіндіріңдер.



5.1-сурет



5.2-сурет

5.18. Квадраттың қабырғасы $(b+3)$ м. Егер квадраттың әр қабырғасын 4 метрге арттырса, оның ауданы неше квадрат бірлікке артады?

5.19. Теңбе-теңдік орындалатындай етіп, бос орынды толтырыңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (\square + 2b^2)^2 = 9a^4 + 12a^2b^2 + 4b^4 & 2) (15m + \square)^2 = 225m^2 + 12n^3m + 0,16n^6 \\ 3) (3x^2 - 2,5y)^2 = 9x^4 - \square + 6,25y^2 & 4) (3x^4 - 2a^6)^2 = 9x^8 - 12x^4a^6 + \square \end{array}$$

5.20. Теңдеулерді шешіңдер.

$$\begin{array}{ll} 1) 4x^2 - (2x-1)^2 = 15 & 3) (3x+1)^2 - (3x-1)^2 = 11x + 1,2 \\ 2) 9x^2 - 1 = (3x-2)^2 & 4) (5+2y)(y-3) - 2(y-1)^2 = 0 \end{array}$$

5.21. Теңдеулердің түбірін табыңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) 16x(2-x) + (4x-5)^2 = 0 & 2) 9y(y+6) - (3y+1)^2 = -1 \\ 3) 0,5(x-6)^2 + 2x\left(8 - \frac{x}{4}\right) = 2 & 4) y + (5y+2)^2 = 25(2+y^2) \end{array}$$

5.22. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) (a+b)^2 - (a-b)^2$$

$$4) 5(3-5x)^2 - 5(3x-7)(3x+7)$$

$$2) (m+4)^2 - 4(m+1)^2$$

$$5) (a+1)^2 + 3(a-1)^2 - 5(a-1)(a+1)$$

$$3) 3(2-y)^2 + 4(y-5)^2$$

$$6) (x-1)^2 - 4(x+1)^2 - 6(x+1)(x-1)$$

5.23. Амалдарды орындандар.

$$1) ((3a+b)^2 - (a+3b)^2) \cdot 2ab$$

$$2) ((x^2+2x)^2 + (2x^2-x)^2) : 5x^2$$

С

5.24. $(a-b)^2$ өрнегіне қандай өрнекті қосқанда қосынды $(a+b)^2$ өрнегіне теңбе-тең болады?

5.25. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$1) (a-b)^2 = (b-a)^2$$

$$2) (-a-b)^2 = (a+b)^2$$

5.26. Теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$2) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

5.27. 5.26-есептегі формулаларды қолданып, көпмүшеге түрлендіріңдер.

$$1) (a+2b)^3$$

$$2) (c-3d)^3$$

$$3) (2-m)^3$$

$$4) (3x+2b)^3$$

5.28. a және b сандары квадраттарының қосындысын $a+b$ және $a-b$ арқылы өрнектеңдер.

5.29. $4ab$ өрнегін $a+b$ және $a-b$ арқылы өрнектеңдер.

5.30. Теңбе-теңдікті дәлелдеңдер: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

5.31. $3p^2 + 3q^2 + 3z^2 - 2pq - 2pz - 2zq$ көпмүшесі оның құрамындағы өшптердің кез келген сандық мәнінде теріс емес мәндер қабылдайтынын дәлелдеңдер.

5.32. Көпмүше түріне келтіріңдер: 1) $((a+b)^2)^2$; 2) $(a-b)^4$.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.33. Көбейткіштерге жіктеңдер.

$$1) x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$2) a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$$

5.34. Көпмүше түріне келтіріңдер.

$$1) (a^3 - 3a^2b + b)(2a^2 + 2ab - 3b^2)$$

$$2) (a+3b)(a-3b)$$

- 5.35. Бір-бірінен 920 км қашықтықта орналасқан A және B пункттерінен бір уақытта бір-біріне қарама-қарсы екі пойыз шықты. Бірінші пойыздың жылдамдығы екіншісіне қарағанда 10 км/сағ артық. Пойыздар 5 сағ жүрген соң олардың бір-бірінен арақашықтығы 70 км болды. Пойыздардың жылдамдығын табыңдар.
- 5.36. Бірмүшенің квадраты түрінде жазыңдар.
 1) $0,25x^4$ 2) $49a^6$ 3) $4m^2n^4$ 4) $0,04a^6b^4$

5.2. Екі өрнектің квадраттарының айырмасы

5.2.1. Екі өрнектің айырмасы мен қосындысының көбейтіндісі

$a-b$ айырмасын $a+b$ қосындысына көбейтейік:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Сонымен,

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \quad (3)$$

Екі өрнектің айырмасы мен қосындысының көбейтіндісі осы өрнектердің квадраттарының айырмасына тең.

- 1-мысал. а) $(4-5a)(4+5a)=4^2-(5a)^2=16-25a^2$
 ә) $(8+3x)(8-3x)=8^2-(3x)^2=64-9x^2$
 б) $(-m-7p)(7p-m)=(-1)(m+7p)(7p-m)=$
 $=-[(7p)^2-m^2]=-(49p^2-m^2)=m^2-49p^2$

2-мысал. $(2x-3y)(2x+3y)+9y^2-x$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі: $(2x-3y)(2x+3y)+9y^2-x=4x^2-9y^2+9y^2-x=4x^2-x$.

5.2.2. Екі өрнектің квадраттарының айырмасын көбейткіштерге жіктеу

(3) формуланы мына түрде жиі қолданады:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad (4)$$

(4) формуланы екі өрнектің квадраттарының айырмасын көбейткіштерге жіктеу формуласы деп атайды.

Екі өрнектің квадраттарының айырмасы осы өрнектердің айырмасы мен қосындысының көбейтіндісіне тең.

- 3-мысал. а) $64-x^2=8^2-x^2=(8-x)(8+x)$
 ә) $49a^2-25b^2c^4=(7a)^2-(5bc^2)^2=(7a-5bc^2)(7a+5bc^2)$
 б) $(2a-b)^2-(a+2b)^2=(2a-b-a-2b)(2a-b+a+2b)=(a-3b)(3a+b)$

4-мысал. $4a^2 - 9b^2 - 2a - 3b$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік.

Шешуі: $4a^2 - 9b^2 - 2a - 3b = (2a - 3b)(2a + 3b) - (2a + 3b) = (2a + 3b)(2a - 3b - 1)$.



1. Екі өрнектің айырмасы мен қосындысының көбейтіндісін табудың ережесін айтыңдар.
2. Екі өрнектің квадраттарының айырмасын көбейткіштерге жіктеу ережесін айтыңдар.
3. (3) формуланы дәлелдеңдер.

Жаттығулар

А

5.37. Көбейтуді орындаңдар.

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $(m+n)(m-n)$ | 2) $(q-p)(q+p)$ | 3) $(c-d)(d+c)$ |
| 4) $(a-c)(c+a)$ | 5) $(x+y)(y-x)$ | 6) $(y-5)(y+5)$ |
| 7) $(x+2)(2-x)$ | 8) $(1-a)(1+a)$ | 9) $(n-2m)(n+2m)$ |
| 10) $(2x-3y)(2x+3y)$ | 11) $(8a+9b)(9b-8a)$ | 12) $(5x+3y)(3y-5x)$ |

5.38. Көбейтуді орындаңдар.

- | | | |
|-------------------|---------------------|-----------------------|
| 1) $(m-3)(m+3)$ | 2) $(c-7)(c+7)$ | 3) $(4+5a)(5a-4)$ |
| 4) $(7x-2)(7x+2)$ | 5) $(8b+5a)(5a-8b)$ | 6) $(10p-6q)(10p+6q)$ |

5.39. Көпмүше түрінде жазыңдар.

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| 1) $(-c+d)(c+d)$ | 2) $(-a+b)(b-a)$ | 3) $(-x-y)(x-y)$ |
| 4) $(a+b)(-a-b)$ | 5) $(x-y)(y-x)$ | 6) $(-a-b)(-a-b)$ |

5.40. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- | | | | |
|-----------------|------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 - y^2$ | 2) $m^2 - n^2$ | 3) $c^2 - 25$ | 4) $a^2 - 1$ |
| 5) $25 - a^2$ | 6) $49 - b^2$ | 7) $100 - p^2$ | 8) $m^2 - 400$ |
| 9) $b^2 - 0,04$ | 10) $1,21 - x^2$ | 11) $n^2 - \frac{4}{9}$ | 12) $\frac{25}{64} - p^2$ |

5.41. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1) $9a^2 - 25b^2$ | 2) $4c^2 - 49d^2$ | 3) $-81 + 25m^2$ | 4) $x^2y^2 - 0,04$ |
| 5) $0,16 - x^2$ | 6) $144 - 49n^2$ | 7) $a^2b^2 - c^2$ | 8) $p^2q^2 - 4k^2$ |

5.42. Есептеңдер.

- | | | |
|-------------------|------------------|--------------------|
| 1) $(30+1)(30-1)$ | 2) $61 \cdot 59$ | 3) $199 \cdot 201$ |
| 4) $72 \cdot 68$ | 5) $55^2 - 45^2$ | 6) $41^2 - 31^2$ |
| 7) $76^2 - 24^2$ | 8) $37^2 - 23^2$ | |

5.43. Теңдеулерді шешіңдер.

$$\begin{array}{lll} 1) x^2 - 9 = 0 & 2) x^2 - 0,04 = 0 & 3) x^2 - 81 = 0 \\ 4) y^2 - \frac{1}{9} = 0; & 5) y^2 - 1\frac{9}{16} = 0 & 6) y^2 - 2\frac{1}{4} = 0 \end{array}$$

5.44. Есептеңдер.

$$\begin{array}{lll} 1) 15,2 \cdot 14,8 & 2) 19,9 \cdot 20,1 & 3) 4,01 \cdot 3,99 \\ 4) 29,8 \cdot 30,2 & 5) 86^2 - 14^2 & 6) 328^2 - 172^2 \\ 7) \left(2\frac{3}{4}\right)^2 - \left(1\frac{1}{4}\right)^2 & 8) \left(7\frac{1}{5}\right)^2 - \left(2\frac{1}{5}\right)^2 \end{array}$$

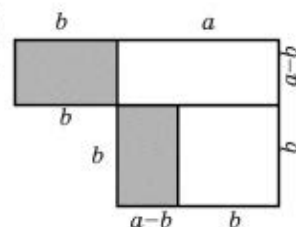
5.45. Амалдарды орындаңдар.

$$\begin{array}{lll} 1) (2ab-c)(2ab+c) & 2) (4+3xy)(4-3xy) & 3) (5a-3b)(5a+3b) \\ 4) (5b+4a)(4a-5b) & 5) (5x+6y)(6y-5x) & 6) (2p+7q)(7q-2p) \end{array}$$

5.46. Көбейткіштерге жіктеңдер.

$$\begin{array}{lll} 1) 25a^2 - b^2 & 2) 9x^2 - 16y^2 & 3) 49 - m^2n^2 \\ 4) -81x^2 + 16y^2 & 5) 36p^2 - 25q^2 & 6) 4a^2b^2 - 1 \end{array}$$

5.47. 5.3-суретті пайдаланып, a және b ($a > b$) оң сандары үшін $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ формуласының геометриялық мағынасын түсіндіріңдер.



5.3-сурет

В

5.48. Көпмүше түрінде жазыңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (2xy-1)(2xy+1) & 2) (1+3ab)(1-3ab) \\ 3) (8ab+5)(5-8ab) & 4) (10cx-6)(10cx+6) \\ 5) (8+9cd)(9cd-8) & 6) (0,2t-0,5u)(0,2t+0,5u) \end{array}$$

5.49. Көбейтуді орындаңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (a^2-5)(a^2+5) & 2) (4-x^2)(4+x^2) \\ 3) (9x-y^2)(9x+y^2) & 4) (5a^2-3b)(5a^2+3b) \\ 5) (4m^2+6n)(4m^2-6n) & 6) (1,3ab-1,1c)(1,3ab+1,1c) \end{array}$$

5.50. Амалдарды орындаңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) (a^2+b^2)(a^2-b^2) & 2) (c^3-d^3)(c^3+d^3) \\ 3) (10m^2-n^2)(10m^2+n^2) & 4) (c^4+d^2)(c^4-d^2) \\ 5) (5x^2+2y^3)(2y^3-5x^2) & 6) (1,4c-0,7a^3)(1,4c+0,7a^3) \end{array}$$

5.51. Көбейтуді орындаңдар.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1) $(x^n + y^n)(x^n - y^n)$ | 2) $(a^k - b)(a^k + b)$ |
| 3) $(p^m - q^n)(p^m + q^n)$ | 4) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$ |
| 5) $(5 - x)(5 + x)(25 + x^2)$ | 6) $(a - 2)^2(a + 2)^2$ |

5.52. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1) $(2a + 5)^2 - 49$ | 2) $(5x - 2y)^2 - 9y^2$ |
| 3) $p^2 - (3p + 1)^2$ | 4) $(2a + b)^2 - (a - 2b)^2$ |
| 5) $(x + y)^2 - (x - y)^2$ | 6) $(4p - q)^2 - (2p + 3q)^2$ |

5.53. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 1) $c^6 - 9x^4$ | 2) $x^4y^2 - 1$ | 3) $25a^2b^2 - 16x^4$ | 4) $100x^2 - y^8$ |
|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|

5.54. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- | | | |
|--------------------|-----------------------|---|
| 1) $81y^2 - a^8$ | 2) $16x^2y^4 - 81z^2$ | 7) $\frac{m^4n^6}{9} - \frac{p^4}{16}$ |
| 3) $25m^2 - 49n^2$ | 4) $0,49p^4 - m^2q^6$ | 8) $\frac{4a^2x^4}{25} - \frac{9y^4}{16}$ |
| 5) $1 - 64a^8$ | 6) $a^4 - a^8$ | |

5.55. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

- | | | |
|---------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1) $(a + 2)^2 - 1$ | 2) $16 - (x + y)^2$ | 3) $(5y - 6)^2 - 49$ |
| 4) $(m - 7)^2 - 64$ | 5) $16a^2 - (4a + 6)^2$ | 6) $x^6 - (2y^2 - x^3)^2$ |

5.56. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1) $(5a + 6)^2 - 81$ | 2) $25 - (a + 7)^2$ | 3) $9m^2 - (1 + 2m)^2$ |
| 4) $(5x - 3y)^2 - 16x^2$ | 5) $(5c - 3d)^2 - 9d^2$ | 6) $49m^2 - (n + 8m)^2$ |

5.57. Есептеңдер.

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $2,1 \cdot 1,9$ | 2) $4,02 \cdot 3,98$ | 3) $19,8 \cdot 20,2$ |
| 4) $1,05 \cdot 0,95$ | 5) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$ | 6) $\left(4\frac{1}{6}\right)^2 - \left(1\frac{1}{6}\right)^2$ |
| 7) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$ | 8) $21,3^2 - 21,2^2$ | |

5.58. Бөлшектердің мәнін есептеп табыңдар.

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\frac{72}{13^2 - 11^2}$ | 2) $\frac{79^2 - 65^2}{420}$ | 3) $\frac{92^2 - 48^2}{27^2 - 17^2}$ | 4) $\frac{63^2 - 27^2}{83^2 - 79^2}$ |
|-----------------------------|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|

5.59. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) $(2a+b)^2 - (a-2b)^2$

2) $(x+y)^2 - (y-z)^2$

3) $(p+q)^2 - (p-q)^2$

4) $(4a-b)^2 - (2a+3b)^2$

С

5.60. Тізбектес екі натурал санның квадраттарының айырмасы тақ сан болатынын дәлелдеңдер.

5.61. Натурал n -нің кез келген мәнінде $(4n+5)^2 - 9$ өрнегінің мәні 8-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

5.62. Натурал n -нің кез келген мәнінде $(2n+11)^2 - 4n^2$ өрнегінің мәні 11-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

5.63. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $p^2 - m^2 - k^2 + 2mk$

2) $a^2b + b^2c + ac^2 - ab^2 - bc^2 - a^2c$

3) $(x + 3y)^2 - y^2 + 2xy - x^2$

4) $a^4 + b^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3$

5.64. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $a^2 - b^2 - 2,5(a-b)$

2) $m^2 - n^2 + 1,5(m+n)$

3) $x^2 + 5x + 5y - y^2$

4) $4c^2 - b^2 - 2c + b$

5.65. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $16a^{17} - a^{15}$

2) $m^{20} - \frac{16}{49}m^{18}$

3) $x^6 - 16x^2$

4) $y^7 - 1\frac{7}{9}y^5$

5.66. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $a^2 + b^2 + 2ab - 1$

2) $4 - 25m^2 + 10mn - n^2$

3) $81x^2 + 6ab - 9a^2 - b^2$

4) $x^2y^2 - 4xy - x^2 - y^2 + 1$

5.67. Теңдеулерді шешіңдер.

1) $x^3 - 6x^2 = 6 - x$

2) $y^3 + 3y^2 - 4y - 12 = 0$

3) $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$

4) $4y^3 - 3y^2 - 4y + 3 = 0$

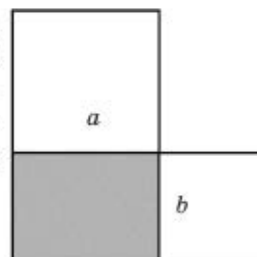
5) $2x^3 - x^2 - 32x + 16 = 0$

6) $(y+6)^2 - (y+5)(y-5) = 79$

5.68. Натурал n -нің әрбір мәнінде:

1) $(2n+3)^2 - (2n-1)^2$ мәні 8-ге; 2) $(5n+1)^2 - (2n-1)^2$ мәні 7-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

- 5.69. Тіктөртбұрыш жанынан оның қабырғаларына тіркеп квадраттар салынған (5.4-сурет). Бір квадраттың ауданы екіншісінің ауданынан 95 см^2 артық. Егер тіктөртбұрыштың ұзындығы енінен 5 см артық болса, оның периметрі неге тең?



5.4-сурет

Қайталауға арналған жаттығулар

- 5.70. Өрнектерді бірімшенің кубы түріне келтіріңдер.

- 1) $64x^3$ 2) $27a^6$ 3) $8m^9$
 4) $-64x^3y^6$ 5) $-8a^9b^6$ 6) $0,027p^3q^9$

- 5.71. Екімүшенің квадраты түріне келтіріңдер.

- 1) $4a^2b^2+4ab+1$ 2) $1-xy+\frac{x^2y^2}{4}$

- 5.72. Теңдіктерді дәлелдеңдер.

- 1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

- 5.73. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) $12a^3x-36a^2bx+27ab^2x$ 2) $2a^2b^3-28ab^2+98b$

- 5.74. Турист теміржол бекетіне дейін 4 км/сағ жылдамдықпен жүріп барса, пойызға жарты сағат кешігіп қалады, ал 5 км/сағ жылдамдықпен жүрсе, онда пойыз жүргенге дейін 6 мин ерте жетеді. Турист қандай қашықтықты жүріп өтуі керек еді?

5.3. Екі өрнектің кубтарының қосындысы мен айырмасы

5.3.1. Екі өрнектің кубтарының қосындысын көбейткіштерге жіктеу

Екі өрнектің кубтарының қосындысын көбейткіштерге жіктеу үшін мына формуланы қолданады:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (5)$$

(5) теңбе-теңдікті дәлелдейік. Шынында да, көпмүшені көпмүшеге көбейту ережесі бойынша:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

(5) теңбе-теңдік екі өрнектің кубтарының қосындысының формуласы деп аталады. (5) формуланың оң жақ бөлігіндегі a^2-ab+b^2 өрнегінің a минус b айырмасының квадраты $a^2-2ab+b^2$ өрнегінен айырмашылығы

ab -нің коэффициентінде ғана. Ал $a^3-2ab+b^3$ үшмүшесі айырманың толық квадраты деп аталады. Сондықтан a^3-ab+b^3 үшмүшесін айырманың толымсыз квадраты деп атайды. Сонымен:

Екі өрнектің кубтарының қосындысы осы өрнектердің қосындысын олардың айырмасының толымсыз квадратына көбейткенге тең.

1-мысал.

$$64a^3+1=(4a)^3+1^3=(4a+1)((4a)^2-4a \cdot 1+1^2) = (4a+1)(16a^2-4a+1)$$

5.3.2. Екі өрнектің кубтарының айырмасын көбейткіштерге жіктеу

Кез келген a және b өрнектері үшін мына теңбе-теңдік орындалады:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \quad (6)$$

Шынында да,

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3.$$

(6) формуланы екі өрнектің кубтарының айырмасының формуласы деп атайды. a^2+ab+b^2 үшмүшесі қосындының толымсыз квадраты деп аталады.

Екі өрнектің кубтарының айырмасы осы өрнектердің айырмасын олардың қосындысының толымсыз квадратына көбейткенге тең.

$$\begin{aligned} 2\text{-мысал. } 8p^3-q^6 &= (2p)^3-(q^2)^3 = (2p-q^2)((2p)^2+2p \cdot q^2+(q^2)^2) = \\ &= (2p-q^2)(4p^2+2pq^2+q^4) \end{aligned}$$



1. Екі өрнектің кубтарының қосындысының формуласын жазыңдар.
2. Екі өрнектің кубтарының қосындысын көбейткіштерге жіктеу ережесін айтыңдар.
3. Екі өрнектің кубтарының айырмасының формуласын жазыңдар.
4. Екі өрнектің кубтарының айырмасын көбейткіштерге жіктеу ережесін айтыңдар.
5. (5) және (6) формулаларды дәлелдендер.
6. Айырманың (қосындының) толымсыз квадраты деген не?

Жаттығулар

А

5.75. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1) x^3+y^3 | 2) x^3-y^3 | 3) m^3-n^3 | 4) m^3+n^3 |
| 5) p^3+q^3 | 6) p^3-q^3 | 7) a^3+8 | 8) a^3-8 |
| 9) m^3+27 | 10) n^3-27 | 11) $1-x^3$ | 12) $1+y^3$ |

5.76. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- | | | | |
|--------------|---------------|-----------------|--------------|
| 1) $27-8a^3$ | 2) $8x^3+y^3$ | 3) $27a^3-8b^3$ | 4) $1+64y^3$ |
|--------------|---------------|-----------------|--------------|

$$5) 125x^3 - 27y^3 \quad 6) 1 - 8b^3 \quad 7) 8 + \frac{1}{8}a^3 \quad 8) \frac{m^3}{64} + \frac{n^3}{125}$$

5.77. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

$$1) -a^3 + b^3 \quad 2) -a^6 + \frac{1}{8} \quad 3) x^6 + 27$$

$$4) -64 - y^3 \quad 5) -\frac{b^3}{27} - 1 \quad 6) m^6 + n^6$$

5.78. Екі өрнектің кубтарының қосындысы немесе айырмасы түрінде жазыңдар.

$$1) (a-2)(a^2+2a+4) \quad 2) (x+2y)(x^2-2xy+4y^2) \\ 3) (4+b)(16-4b+b^2) \quad 4) (3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$$

5.79. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) (a+1)(a^2-a+1) - a^3 \quad 2) (x+y)(x^2-xy+y^2) - x(x^2+y^2) \\ 3) (m-2)(m^2+2m+4) + 8 \quad 4) (c+3)(c^2-3c+9) - 27$$

5.80. Көбейткіштерге жіктеңдер.

$$1) x^3 + 64 \quad 2) 125 - x^3 \quad 3) 27a^3 - 64b^3 \\ 4) 1 + 27m^3 \quad 5) \frac{n^3}{64} + 8 \quad 6) \frac{p^3}{64} - \frac{q^3}{27}$$

5.81. Көбейткіштерге жіктеңдер.

$$1) -a^3 + b^3 \quad 2) -x^3 + \frac{1}{y^3} \quad 3) a^6 + 1 \\ 4) x^3y^3 - 1 \quad 5) m^3n^3 + 8 \quad 6) -\frac{1}{8} - a^3$$

5.82. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) (a+2)(a^2-2a+4) \quad 2) (x+3)(x^2-3x+9) \\ 3) (m-4)(m^2+4m+16) \quad 4) (2x-y)(4x^2+2xy+y^2) \\ 5) (3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2) \quad 6) (1+c)(1-c+c^2)$$

В

5.83. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

$$1) a^3 + b^6 \quad 2) x^9 - y^3 \quad 3) x^6 + y^6 \\ 4) x^6 + y^3 \quad 5) p^3 - q^9 \quad 6) m^9 - n^9$$

5.84. Көбейткіштерге жіктеңдер.

$$1) m^3 + n^3 \quad 2) x^9 - y^6 \quad 3) a^6 - 8 \quad 4) b^9 + 27$$

5.85. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) x^3y^3+1

2) $27-a^3b^3$

3) $a^6c^3-b^3$

4) $1-x^3y^3$

5) a^3b^3+64

6) $27x^3-y^3z^3$

5.86. 1) 326^3+74^3 өрнегінің мәні 400-ге; 2) 425^3-125^3 өрнегінің мәні 300-ге еселік болатынын көрсетіңдер.

5.87. 1) 43^3+37^3 саны 80-ге; 2) 79^3-35^3 саны 44-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

5.88. Бірмүшелердің кубтарының қосындысы немесе айырмасы түрінде жазыңдар.

1) $(ab-4)(a^2b^2+4ab+16)$

2) $(3x+yz)(9x^2-3xyz+y^2z^2)$

3) $\left(2a - \frac{b}{2}\right)\left(4a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right)$

4) $\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x^2}{16} - \frac{xy}{20} + \frac{y^2}{25}\right)$

5.89. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) $a^3b^6-c^3$

2) $3ax^3-3ay^3$

3) $12am^3-12an^3$

4) a^6b^3+27

5) $1-p^9$

6) $64x^3y^6+343a^3$

5.90. Көбейткіштерге жіктендер.

1) $(a+b)^3-(a-b)^3$

2) $(2x+y)^3+(x-2y)^3$

3) $(2mn-1)^3+1$

4) $(3a-2b)^3+8b^3$

C

5.91. Көбейткіштерге жіктендер.

1) $a^3+b^3-2ab(a+b)$

2) $m^3-n^3-6m(m^2+mn+n^2)$

3) $x^3-y^3+8x^2y-8xy^2$

4) $p^3+q^3-2pq(p^2-pq+q^2)$

5.92. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) $8a^3+6a^2+3a+1$

2) $x^3-4x^2+20x-125$

3) $m^4+mn^3-m^3n-n^4$

4) $c^4+c^3y-cy^3-y^4$

5.93. Көпмүше түрінде жазыңдар.

1) $(3x^3-1)(9x^6+3x^3+1)$

2) $(a^5-3b^6)(a^{10}+3a^5b^6+9b^{12})$

3) $(m^3+n^{10})(m^6-m^3n^{10}+n^{20})$

4) $(7b^2+2)(49b^4-14b^2+4)$

5.94. Көбейткіштерге жіктендер.

1) $(a-2b)^3+8b^3$

2) $27-(x-2)^3$

3) $(m+1)^3+64$

- 5.95. n -нің әрбір натурал мәнінде: 1) $(2n+3)^3 - (2n-1)^3 + 4$ өрнегі 16-ға;
2) $(5n+1)^3 + (2n-1)^3 - 7n^3$ өрнегі 21-ге бөлінетінін көрсетіңдер.

- 5.96. Көбейткіштерге жіктеңдер.

$$1) a^{3n} - b^{6m} \quad 2) 8x^{9k} + 27y^{6p} \quad 3) \frac{a^{6n}}{64} - 125c^{27k}$$

- 5.97. 1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3$ қосындысы 5-ке бөлінетінін;
2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 49^3$ қосындысы 25-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

- 5.98. Өрнекті ықшамдап алып, оның мәнін айнымалының көрсетілген мәндерінде есептеңдер.

1) $(3a-1)(3a+1) - (3a-1)^2$, мұндағы $a=0,3$

2) $(5+2x)^2 - 2,5x(8x+7)$, мұндағы $x=-0,5$

- 5.99. $A(-2; 2)$; $B(4; 8)$; $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ нүктелері $y = \frac{1}{2}x^2$ функциясының графигінде жата ма?

- 5.100. $y=0,4x+2$ функциясының графигі мен координаталар өсінің қиылысу нүктелерін табыңдар.

- 5.101. 1) $y=-0,001x^2$; 2) $y=100x^2$; 3) $y=-2x^3$; 4) $y = \frac{1}{8}x^3$ функцияларының графигі қай координаталық ширектерде орналасқан?

- 5.102. Көбейткіштерге жіктеңдер.

$$1) a^2 + 4b^2 - 9c^2 - 4ab \quad 2) x^3 + x^2 - xy^2 - y^2$$

5.4. Екі өрнектің қосындысының кубы және айырмасының кубы

5.4.1. Екі өрнектің қосындысының кубы

$(a+b)^3$ өрнегін көпмүше түріне келтірейік:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Сонымен,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (7)$$

Екі өрнектің қосындысының кубы бірінші өрнектің кубы, плюс бірінші өрнектің квадраты мен екінші өрнектің үш еселенген көбейтіндісі, плюс бірінші өрнек пен екінші өрнектің квадратының үш еселенген көбейтіндісі, плюс екінші өрнектің кубына тең.

1-мысал. Өрнектерді көпмүше түріне келтірейік.

$$\begin{aligned} \text{а) } (3x + y)^3 &= (3x)^3 + 3(3x)^2 \cdot y + 3 \cdot 3x \cdot y^2 + y^3 = \\ &= 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3; \end{aligned}$$

$$\text{ә) } 11^3 = (10+1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2 + 1^3 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331.$$

2-мысал. $a^2+4ab+4b^2-a^3-6a^2b-12ab^2-8b^3$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктейік.

$$\begin{aligned} \text{Шешуі: } a^2+4ab+4b^2-a^3-6a^2b-12ab^2-8b^3 &= \\ &= (a+2b)^2 - (a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 2b + 3 \cdot a \cdot (2b)^2 + (2b)^3) = \\ &= (a+2b)^2 - (a+2b)^3 = (a+2b)^2(1-a-2b). \end{aligned}$$

5.4.2. Екі өрнектің айырмасының кубы

$(a-b)^3$ өрнегін көпмүшеге түрлендірейік:

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) = a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 = \\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \end{aligned}$$

Сонымен,

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (8)$$

Екі өрнектің айырмасының кубы бірінші өрнектің кубы, минус бірінші өрнектің квадраты мен екінші өрнектің үш еселенген көбейтіндісі, плюс бірінші өрнек пен екінші өрнектің квадратының үш еселенген көбейтіндісі, минус екінші өрнектің кубына тең.

(7) және (8) теңбе-теңдіктерді сәйкесінше екі өрнектің қосындысының кубы және айырмасының кубы формулалары деп атайды.

$$\begin{aligned} \text{3-мысал. Өрнектерді ықшамдайық: а) } (3x-2y)^3 &= 27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3; \\ \text{ә) } 27a^3-108a^2c+144ac^2-64c^3 &= (3a)^3-3 \cdot (3a)^2 \cdot 4c+3 \cdot 3a(4c)^2-(4c)^3=(3a-4c)^3. \end{aligned}$$

4-мысал. Қыры $(x+2)$ дм болатын кубқа қырының ұзындығы $(x-2)$ дм куб салынды. Үлкен куб пен кішкентай куб арасындағы кеңістік көлемін табу керек.

$$\text{Шешуі. 1) үлкен кубтың көлемі: } (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

$$\text{2) Кішкентай кубтың көлемін табайық, ол: } (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

$$\text{3) Екі куб көлемдерінің айырмасын табайық, ол: } (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 12x^2 + 16 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Жауабы: үлкен куб пен кішкентай куб арасындағы кеңістік көлемі $(12x^2+16)$ дм³.



1. Екі өрнектің қосындысының кубын табу ережесін айтыңдар.
2. Екі өрнектің айырмасының кубын табу ережесін айтыңдар.
3. (7) және (8) формулаларды дәлелдеңдер.

Жаттығулар

А

5.103. Көпмүше түріне келтіріңдер.

- | | | |
|--------------|--------------|---------------|
| 1) $(x+y)^3$ | 2) $(c-d)^3$ | 3) $(p+q)^3$ |
| 4) $(p-q)^3$ | 5) $(2+a)^3$ | 6) $(3-b)^3$ |
| 7) $(x-2)^3$ | 8) $(4+x)^3$ | 9) $(a+2b)^3$ |

5.104. Көпмүшеге түрлендіріңдер.

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1) $\left(4m + \frac{1}{3}n\right)^3$ | 2) $\left(\frac{2}{3}x - 3y\right)^3$ | 3) $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)^3$ |
| 4) $\left(\frac{1}{6}x + 2y\right)^3$ | 5) $(0,2x - 5y)^3$ | 6) $(3a - 0,6b)^3$ |
| 7) $(0,1m - 4n)^3$ | 8) $(0,5a + 0,16)^3$ | |

5.105. Көпмүшені екі өрнектің қосындысының немесе айырмасының кубы түрінде жазыңдар.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ | 2) $8 + 12x + 6x^2 + x^3$ |
| 3) $27 - 27b + 9b^2 - b^3$ | 4) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ |
| 5) $0,008 + 0,12a + 0,6a^2 + a^3$ | 6) $\frac{m^3}{27} - m^2n + 9mn^2 - 27n^3$ |

5.106. Өрнектерді ықшамдаңдар.

- | | |
|---|--|
| 1) $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$ | 2) $125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$ |
| 3) $\frac{u^3}{8} + \frac{3u^2v}{2} + 6uv^2 + 8v^3$ | 4) $0,001a^3 - 0,3a^2b + 30ab^2 - 1000b^3$ |

5.107. Есептеңдер.

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1) $(a+2b)^3$ | 2) $(x-3y)^3$ | 3) $(2m-3n)^3$ |
| 4) $\left(4x + \frac{1}{3}y\right)^3$ | 5) $\left(\frac{2}{3}a - 3b\right)^3$ | 6) $\left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q\right)^3$ |

5.108. Көпмүше түріне келтіріңдер.

$$\begin{array}{lll} 1) \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^3 & 2) \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y\right)^3 & 3) \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{7}\right)^3 \\ 4) (0,5+0,1b)^3 & 5) (0,2m+0,1n)^3 & 6) (0,2x+0,5y)^3 \end{array}$$

5.109. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^3}{8} - \frac{x^2y}{4} + \frac{xy^2}{6} - \frac{y^3}{27} & 2) \frac{125m^3}{27} + \frac{125m^2n}{6} + \frac{125mn^2}{4} + \frac{125n^3}{8} \\ 3) 0,008a^3 - 0,6a^2b + 15ab^2 - 125b^3 & 4) 0,027x^3 + 1,08x^2y + 14,4xy^2 + 64y^3 \end{array}$$

В

5.110. Дәрежеге шығарыңдар.

$$\begin{array}{lll} 1) (2a^3+3b^2)^3 & 2) (x^3-y^2)^3 & 3) (2m^2-3n^2)^3 \\ 4) (7p^3+9q^4)^3 & 5) \left(10x^2 + \frac{1}{3}a^2\right)^3 & 6) (0,3a^5+0,5b^2)^3 \end{array}$$

5.111. Көпмүше түрінде жазыңдар.

$$\begin{array}{llll} 1) (a^2+b^2)^3 & 2) (x^2-y^2)^3 & 3) (2m^2-3n^2)^3 & 4) (2a^3-3b^2)^3 \\ 5) (4m^3+5n^2)^3 & 6) (10p^4-6q^2)^3 & 7) (7u^3-9v^4)^3 & 8) (10x^3+3y^2)^3 \end{array}$$

5.112. Теңбе-теңдіктерді дәлелдендер.

$$1) a^3+3ab(a+b)+b^3=(a+b)^3 \quad 2) a^3-3ab(a-b)-b^3=(a-b)^3$$

5.113. Көпмүшеге түрлендіріңдер.

$$\begin{array}{lll} 1) \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b^2\right)^3 & 2) \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}y^3\right)^3 & 3) \left(10a^3 + \frac{1}{3}b^3\right)^3 \\ 4) (0,3a^5+0,5a)^3 & 5) \left(0,1x^4 - \frac{1}{2}x^3\right)^3 & 6) (1,5m^3+0,3m^4)^3 \end{array}$$

5.114. Көбейткіштерге жіктендер.

$$\begin{array}{ll} 1) 1000x^9 + 100x^6y^2 + \frac{10}{3}x^3y^4 + \frac{1}{27}y^6 & 2) 8x^5+36x^4+54x^3+27x^2 \\ 3) 125x^4y-225x^3y^2+135x^2y^3-27xy^4 & 4) 27a^3b-27a^3b^2+9a^3b^3-a^3b^4 \end{array}$$

5.115. Көбейткіштерге жіктендер.

$$1) (a-b)^3-a^2+2ab-b^2 \quad 2) x^2+y^2+2xy-(x+y)^3$$

3) $a^3 - b^2 - (a - b)^3$

4) $(m + 2n)^3 - m^2 + 4n^2$

5) $(c - 2y)^2 + c^3 - 6c^2y + 12cy^2 - 8y^3$

6) $(x + 3y)^2 - x^3 - 9x^2y - 27xy^2 - 27y^3$

5.116. Теңдеулерді шешіңдер.

1) $(x + 2)^3 = x^3 + 8$

2) $(3x - 1)^3 = 27x^3 - 1$

5.117. Өрнектерді ықшамдап, мәнін табыңдар.

1) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 + 12x^2 - 12xy + 3y^2$, мұндағы $x = 1, 1$; $y = 1, 2$

2) $3(m - 1)^2 + (m + 2)(m^2 - 2m + 4) - (m + 1)^3$, мұндағы $m = -\frac{1}{3}$

3) $(a - 1)^3 - 4a(a + 1)(a - 1) + 3(a - 1)(a^2 + a + 1)$, мұндағы $a = -2$

5.118. Өрнектердегі $*$ -ны теңбе-теңдік орындалатындай етіп, тиісті бірмүшемен алмастырыңдар.

1) $(2a - *)^3 = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - (*)^3$

2) $\left(* + \frac{y}{2} \right)^3 = 27x^3 + \frac{27}{2}x^2y + \frac{3 \cdot *}{4}y^2 + \frac{y^3}{8}$

5.119. Қырының ұзындығы $(a + 5)$ см болатын ағаш кубтан қырының ұзындығы $(a - 5)$ см куб кесіп алынды. Ағаштың қалған бөлігінің көлемі қандай?

С

5.120. Тізбектес екі натурал санның кубтарының айырмасы 3-ке бөлінбейтінін дәлелдендер.

5.121. Тізбектес үш натурал санның кубтарының қосындысы 3-ке бөлінетінін көрсетіңдер.

5.122. Теңдеулерді шешіңдер.

1) $6(x + 1)^2 + 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 2(x + 1)^3 = 32$

2) $5x(x - 3)^2 - 5(x - 1)^3 + 15(x + 2)(x - 2) = 5$

3) $(x + 2)^3 - x(3x + 1)^2 + (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 42$

5.123. Егер n, m, k натурал сандары үшін $n + m + k$ қосындысы 6-ға бөлінсе, онда $n^3 + m^3 + k^3$ қосындысы да 6-ға бөлінетінін дәлелдендер.

5.124. $(a + b)^5$ және $(a - b)^5$ өрнектерін көпмүше түріне келтіріңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

5.125. Теңбе-теңдіктерді дәлелдендер.

1) $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$

2) $(a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2$

5.126. Көбейткіштерге жіктендер.

$$1) x^3 - y^3 + 5x(x^2 + xy + y^2)$$

$$2) a^3 - b^3 - 5a^2b + 5ab^2$$

5.127. $kn^2 - n^2 - kn + n = 74$ болатындай етіп, натурал n және k сандарын табындар.

5.128. Көбейткіштерге жіктендер.

$$1) (x+y)^2 - z^2 + x + y + z$$

$$2) a^4 - a^3b + ab^3 - b^4$$

5.129. А пунктінен 60 км/сағ жылдамдықпен жүк машинасы шықты. 2 сағаттан соң оның соңынан 90 км/сағ жылдамдықпен жеңіл машина шықты. Қанша уақыттан кейін жеңіл машина жүк машинасын қуып жетеді?

5.5. Бүтін өрнектерді түрлендіру

5.5.1. Бүтін өрнекті көпмүшеге түрлендіру

Қосу, азайту, көбейту және дәрежеге шығару амалдарының көмегімен сандар мен айнымалылардан құралған өрнекті **бүтін өрнек** деп атайды. Бүтін өрнектер қатарына көрсетілген амалдармен қоса, нөлге тең емес сандарға бөлу амалы енген өрнектер қосылады.

Мысалы, $2,7a^3b - 3b^3 - 7$; $-\frac{4}{5}ax^2$; $6y^3 - (3x - y)(x^2 + 4y^2)$ – бүтін өрнектер.

Ал $a + x - \frac{x - b}{x + b} + (b - a)(x - c)$ өрнегі бүтін өрнек болмайды, өйткені мұнда

айнымалылары бар өрнекке бөлу амалы бар.

Өрбір бүтін өрнекті көпмүше түріне келтіруге болады, яғни бір-мүшелердің қосындысы түрінде жазуға болады.

1-мысал. $x(1 - 2x)^2 - (x^2 - 2)(2 - x) + 4x^3(3x - 1)$ бүтін өрнегін көпмүше түріне келтірейік.

Шешуі:

$$\begin{aligned} x(1 - 2x)^2 - (x^2 - 2)(2 - x) + 4x^3(3x - 1) &= x(1 - 4x + 4x^2) - (2x^2 - x^3 - 4 + 2x) + 12x^4 - \\ &- 4x^3 = x - 4x^2 + 4x^3 - 2x^2 + x^3 + 4 - 2x + 12x^4 - 4x^3 = 12x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 4. \end{aligned}$$

5.5.2. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеудің әртүрлі тәсілін қолдану

Көпмүшені көбейткіштерге жіктеу үшін ортақ көбейткіштерді жақша сыртына шығару тәсілін, топтау тәсілін, қысқаша көбейту формулаларын қолданып келдік. Кейде есепті шығару барысында көрсетілген тәсілдерді бірнеше рет қолданады.

Өдетте түрлендіруді мүмкіндігінше ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарудан бастайды.

2-мысал. а) $9a^2b - 4b^3 = b(9a^2 - 4b^2) = b(3a - 2b)(3a + 2b)$

ә) $x^2y - 4xy^2 + 4y^3 = y(x^2 - 4xy + 4y^2) = y(x - 2y)^2$

б) $9a^2 - 4c^2 + 12ab + 4b^2 = (9a^2 + 12ab + 4b^2) - 4c^2 = (3a + 2b)^2 - (2c)^2 = (3a + 2b - 2c)(3a + 2b + 2c)$

в) $(m + 2n)^2 - (3m + 4n)^2 = (m + 2n - 3m - 4n)(m + 2n + 3m + 4n) = (-2m - 2n)(4m + 6n) = -4(m + n)(2m + 3n)$

Қысқаша көбейту формулалары мен бүтін өрнекті түрлендірудің тәсілдері басқа есептерді шешуге де қолданылады.

3-мысал. Кез келген x үшін $x^2 - 4x + 7$ өрнегінің мәні оң сан болатынын көрсетейік.

Шешуі. 7-ні $4 + 3$ түрінде жазып, берілген үшмүшені мына түрге келтіреміз:

$$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x - 2)^2 + 3.$$

Мұнда $(x - 2)^2$ – өрнектің квадраты болғандықтан, теріс емес, ал $3 > 0$, онда $x^2 - 4x + 7 > 0$.

4-мысал. Тізбектес екі тақ санның квадраттарының айырмасы 8-ге бөлінетінін көрсетейік.

Шешуі. Тізбектес тақ сандар $2n - 1$ және $2n + 1$ түрінде жазылады. Мұнда n – натурал сан. Онда

$$(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 4n - 1 = 8n,$$

соңғы өрнек натурал n -нің кез келген мәнінде 8-ге бөлінеді.



1. Қандай өрнек бүтін өрнек деп аталады?
2. Бүтін өрнекке және бүтін емес өрнекке мысал келтіріңдер.
3. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеудің қандай тәсілдерін білесіңдер?

Жаттығулар

А

5.130. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $5a^2 - 5b^2$

2) $3m^2 - 3n^2$

3) $a^3 - a$

4) $b^3 - b$

5) $7x^2 - 7y^2$

6) $4m^3 - 4mn^2$

7) $5x^2 - 20y^2$

8) $a^3b - ab^3$

5.131. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $2m(a + b) + a + b$

2) $2a(x + y) + x + y$

- 3) $4x(m-n)-m+n$ 4) $x(a-b)+a-b$
 5) $5x(a+b)-a-b$ 6) $4y(k-p)-k+p$
 7) $3m(x+y)-x-y$ 8) $2a(x-y)-x+y$

5.132. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) $xy^2+x^2y^3$ 2) $a^4b^2-a^2b^4$ 3) $m^2n^2+mn^3$
 4) $a^3b^2+a^5b^3$ 5) $c^3d^2-c^4d^2$ 6) $-x^5y^3-x^2y^5$

5.133. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) $x(a-b)+y(b-a)$ 2) $m^2(a-2)+n(2-a)$
 3) $2m(x-y)-y+x$ 4) $2n(x-y)-(y-x)$

5.134. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

- 1) $2x^2+4xy+2y^2$ 2) $6x^2-12xy+6y^2$ 3) $3a^2-6a+3$
 4) $5m^2+10m+5$ 5) $2xy^2+4xy+2x$ 6) $3a-6ab+3ab^2$

5.135. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) a^2-b^2-a+b 2) a^2-b^2+a+b 3) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$
 4) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$ 5) $m^2+2mn+n^2-mb-nb$ 6) $xc-yx-x^2+2xy-y^2$

5.136. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) $(a-b)^3-3(a-b)^2$ 2) $(x+y)^3+2x(x+y)^2$
 3) $(m+n)^3-m^2-2mn-n^2$ 4) $x^2-4xy+4y^2-(x-2y)^3$

B

5.137. Өрнектердің тек оң мәндер қабылдайтынын дәлелдендер.

- 1) a^2+2a+2 2) $x^2+y^2-2xy+4$
 3) $4m^2-4m+4$ 4) $a^2+b^2+c^2-2bc+3$

5.138. $4x-4x^2-2$ өрнегінің тек теріс мәндер қабылдайтынын көрсетіңдер.

5.139. Теңбе-теңдіктерді дәлелдендер.

- 1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=a^4-b^4$ 2) $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)=a^8-b^8$

5.140. Көбейткіштерге жіктеңдер.

- 1) $25x^2-(x+y)^2$ 2) $100-(3a+7y)^2$ 3) $1-(a^2+b^2)^2$
 4) $m^6n^2-(m-n)^2$ 5) $x^4y^2-(a^2-b^2)^2$ 6) $9x^2y^4-(a-b)^2$

5.141. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

- 1) $(a+2b)^2-(3c+4d)^2$ 2) $(x-y)^2-(m+n)^2$

3) $(m-2n)^2-(2p-3q)^2$ 4) $(2a-3c)^2-(4b+5d)^2$

5) $9(m+n)^2-(m-n)^2$ 6) $4(a-b)^2-(a+b)^2$

7) $16(a+b)^2-9(x+y)^2$ 8) $9(a-b)^2-4(x-y)^2$

5.142. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) a^4-b^4

2) a^6-b^6

3) a^8-b^8

4) a^4-a^3+a-1

5) $(a+b)^3-(a-b)^3$

6) $(a+b)^4-(a-b)^4$

5.143. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx$

2) $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$

5.144. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $(a-2b)^4-8(a-2b)$

2) $(x-3y)^4-27x+81y$

3) $(a-2b)^3-(a+2b)^3$

4) $(2x+3y)^3+(3x-2y)^3$

5.145. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) $m^3-m^2n-mn^2+n^3$

2) $x^5-x^3+x^2-1$

3) x^4+x^3-x-1

4) a^4+a^3+a+1

5) $m^6-m^4+2m^3+2m^2$

6) b^3-8+6b^2-12b

C

5.146. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) x^2-5x+6

2) x^2+6x+8

3) $m^2-7mn+12n^2$

4) $a^2-7ab+10b^2$

5.147. Көбейтінді түрінде жазыңдар.

1) x^8+x^4+1

2) $x^4+x^2y^2+y^4$

3) a^3-3a+2

4) x^3+3x^2-4

5.148. Көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $x^3+6x^2+11x+6$

2) $x^4+x^3+6x^2+5x+5$

5.149. n -нің кез келген бүтін мәндерінде:

1) $(2n+1)^2-1$ саны 8-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

2) n^3-n саны 6-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

5.150. Тізбектес екі жұп санның квадраттарының айырмасы 2^2 -нан үлкен дәрежесіне бөлінбейтінін көрсетіңдер.

5.151. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

1) $(a+b)^2(a-b)-2ab(b-a)-6ab(a-b)=(a-b)^3$

2) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)+(a^3-b^3)(a^3+b^3)=2a^6$

$$3) (a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

$$4) (a^2+cb^2)(d^2+ce^2)=(ad+cbe)^2+c(ae-bd)^2$$

5.152*. a -ның қандай мәндерінде $(x^2+x-1)(x-a)$ көпмүшесінің стандарт түрінде: 1) x ; 2) x^2 болмайды?

5.153*. b -нің қандай мәндерінде $(x^2-10x+6)(2x+b)$ көпмүшесінің стандарт түрінде: 1) x^2 болмайды; 2) x^3 пен x -тің коэффициенттері бірдей болады?

5.154. Өрнектердің ең кіші ортақ еселігін анықтаңдар.

$$1) 2a^2-4ab+2b^2$$

$$6a^2-6b^2$$

$$12a-12b$$

$$2) 3x^2+6xy+3y^2$$

$$4x^2-4y^2$$

$$8x+8y$$

5.6. Мәтінді есептерді математикалық модель құрып шығару

Көптеген өмірден алынған мәтінді есептерді шығару барысында бір, екі немесе одан да көп айнымалылар енгізіп, олардың көмегімен теңдеулер мен теңсіздіктер және олардың жүйесін құрып шешеді.

Мұнда құрылған теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйесі **есептің математикалық моделі** деп аталады.

1-мысал. Дүкендегі 4 кг алма мен 3 кг алмұрттың құны бірдей. Егер алманың бағасы 50 теңгеге қымбаттаса, ал алмұрттың бағасы 50 теңгеге арзандаса, онда олардың бағасы бірдей болар еді. Олардың әрқайсысының бағасы қандай болды?

Шешуі. 1) Есепті шығару үшін алдымен ұтымды түрде айнымалылар енгізу қажет. Өдетте мұндай айнымалылар ретінде біз іздеген шамаларды белгілеген тиімді болмақ. Сонымен, дүкендегі алманың бағасы – x тг, ал алмұрттың бағасы – y тг болсын.

2) Есеп шарты бойынша теңдеулер құрамыз. Есеп шарты бойынша 4 кг алма мен 3 кг алмұртқа бірдей ақша төленді, яғни $4x = 3y$ болуы керек. Екіншіден, алма 50 теңгеге қымбаттаса, ал алмұрт 50 теңгеге арзандаса, онда жемістердің құны бірдей болар еді, яғни $x + 50 = y - 50$ немесе $y = x + 100$. Бізге қажет x пен y бұл екі теңдеудің екеуін де қанағаттандыруы керек. Сондықтан оларды бір жүйеге алып жазамыз:

$$\begin{cases} 4x = 3y, \\ y = x + 100. \end{cases}$$

Сонымен, екінші кезеңде біз таза *алгебралық жүйе* алдық (математикалық модель).

Енді осы алынған теңдеулер жүйесін *алмастыру тәсілімен* шешеміз: Бірінші теңдеуге 2-теңдеудегі y -тің мәнін қоямыз. Сонда:

$$4x = 3(x + 100)$$

$$4x = 3x + 300$$

$$x = 300 \text{ және } y = 400.$$

Біз бұл кезеңде математикалық модельдің жауабын алдық: $x = 300$, $y = 400$.

3) Осы алынған жауаптар бойынша есепте қойылған сұраққа жауап беру керек. Біздің белгілеуіміз бойынша x – алманың бағасы, ал y – алмұрттың бағасы болатын. Олай болса, алғашында дүкенде алманың 1 кг-ы 300 теңгеден, ал алмұрттың 1 кг-ы 400 теңгеден сатылған.

Жауабы: 1 кг алма 300 тг, 1 кг алмұрт 400 тг тұрды.

Осыдан есепті шешуді 3 кезеңге бөліп орындағанымыз көрінеді.

I Айнымалылар енгізіп, есептің математикалық моделін құрдық.

II Құрылған теңдеулерден жүйе құрып, оны шештік.

III Алынған жауаптарды есепте қойылған сұраққа жауап беру үшін қолдандық.

2-мысал. $22 + x = 34 - x$ теңдеуі математикалық моделі болатындай етіп, мәтінді есеп құрастыру керек.

Шешуі. Мысал келтірейік: «Саматта 22 асық және оның досы Асқарда 34 асық бар. Асқар досына бірнеше асық беріп еді, олардың асықтарының саны теңесті. Асқар Саматқа неше асық берді?»

Өрине, бұл есептің жауабын берілген теңдеуді шешу арқылы анықтаймыз. Мұнда x арқылы Асқардың Саматқа берген асықтары саны белгіленген. Сонымен, теңдеудің шешуі:

$$22 + x = 34 - x$$

$$2x = 12$$

$$x = 6.$$

Жауабы: $x = 6$, яғни Асқар Саматқа 6 асық берген.

3-мысал. Екі таңбалы сан өзінің цифрлары мәнінің қосындысынан 3 есе үлкен. Осы екі таңбалы санды табу керек.

Шешуі. Бізге қажет санның ондығын m арқылы, ал бірлігін n арқылы белгілейік. Онда есеп шарты бойынша m мен n нөл мен тоғыз арасында өзгертін цифрлар және $10m + n = 3(m + n)$ теңдігі орындалуы керек. Енді осы теңдеудегі жақшаны ашып, ұқсас мүшелерін біріктірсек,

$$7m = 2n, \quad m, n \in M \text{ түріндегі тура пропорционалдық теңдеуін аламыз.}$$

Мұнда $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ жиыны – теңдеудің анықталу облысы. Осы теңдеуден n -нің 7-ге бөлінетіндігі, ал m -нің 2-ге бөлінетіні

көрінеді. Анықталу облысында 7-ге бөлінетін жалғыз сан 7 болғандықтан, $n = 7$, онда $m = 2$ болуы қажет.

Жауабы: 27.



1. Есептің математикалық моделі деген не? Мысал келтіріңдер.
2. Мәтінді есепті шығаруды неше және қандай кезеңге бөледі? Өрбір кезеңнің мағынасын мысал арқылы ашып көрсетіңдер.



1. Өздерің қандай да бір теңдеу немесе теңдеулер жүйесін алып, оған сай келетін мәтінді есеп құрастырыңдар.
2. 3-мысалдың шығарылу жолын кезеңдерге бөліп көрсетіңдер. Бұл тапсырманы топтасып орындаңдар. Сыныппен жауаптарыңды салыстырып, толықтырыңдар.

Жаттығулар

А

- 5.155. Берілген сөйлемдердің математикалық моделін жазыңдар.
- 1) a және b сандарының қосындысы a және b -нің айырмасынан 4 есе үлкен.
 - 2) a мен b сандарының қатынасы олардың қосындысынан бес есе кем.
- 5.156. Берілген сөйлемдердің математикалық моделін жазыңдар.
- 1) x және y сандарының екі еселенген көбейтіндісі 12-ге тең.
 - 2) үш еселенген p -нің квадраты мен q -дың көбейтіндісі 18-ге тең.
 - 3) m санының 14% -і n санына тең.
 - 4) a және b сандарының қосындысының квадраты 25-ке тең.
- 5.157. Егер m , n , k және l – берілген сандар болса, онда төмендегі математикалық модельдерді мәтінмен жазыңдар.
- | | | |
|----------------------|-----------------------|--------------------|
| 1) $2m \cdot n = 5k$ | 2) $m + l = n + k$ | 3) $m : n = k : l$ |
| 4) $m - n = 3l$ | 5) $0,12m = 2(k - n)$ | 6) $3m = 5k$ |
- Үлгі:* 1) $2m \cdot n = 5k$ – $2m$ мен n -нің көбейтіндісі $5k$ -ға тең.
- 5.158. Егер a – сыныптағы ұлдар саны, ал b – қыздар саны болса, төмендегі математикалық модельдерді мәтінмен жазыңдар.
- | | | | |
|------------|----------------|------------|--------------------|
| 1) $a < b$ | 2) $a + 2 = b$ | 3) $a = b$ | 4) $a + 2 = b - 1$ |
|------------|----------------|------------|--------------------|

Үлгі: $a < b$ – ұлдар қыздарға қарағанда аз.

5.159. p – дәптер саны, q – қалам саны болса, онда математикалық модельді мәтінмен жазыңдар.

1) $30 \cdot p + 15q = 375$ тг 2) $30p + 15 \text{ тг} = 165$ тг

5.160–5.162. Сөйлемдерді математикалық модель түрінде жазыңдар.

5.160. 1) $3a + 14$ және $5a + 3$ өрнектерінің мәндері тең.

2) $4m + 1$ өрнегінің мәні $2m - 1$ өрнегінің мәнінен 5 есе артық.

3) $3b - 8$ өрнегінің мәні $6b - 1$ өрнегінің мәнінің жартысына тең.

4) $\frac{1}{2}c + 1$ өрнегінің мәні $c + 10$ өрнегінің мәнінен 4 есе артық.

5.161. 1) $2 - 3x$ өрнегінің мәні 4-тен кем.

2) $2 - 3x$ өрнегінің мәні 5-тен артық.

3) $2u - 1$ өрнегінің мәні $3u + 4$ өрнегінің сәйкес мәнінен кем.

4) $2u - 1$ өрнегінің мәні $u - 5$ өрнегінің сәйкес мәнінен артық.

5.162. Алмас дүкеннен бағасы 15 теңгелік қаламдар мен бағасы 40 теңгелік бірнеше дәптер алып, барлығына 270 тг төледі. Алмас дүкеннен неше қалам және неше дәптер сатып алды? Есептің әртүрлі шешімін табыңдар.

В

5.163–5.169. Есептердің математикалық моделін құрып шығарыңдар.

5.163. x -тің қандай мәндерінде: 1) $\frac{x-4}{5}$ өрнегінің мәні $\frac{2x+4}{9}$ өрнегі мәнінен 9-ға артық; 2) $\frac{x+17}{5}$ өрнегінің мәні $\frac{x-5}{4}$ өрнегінің мәнінен үш есе артық болады?

5.164. 1) x санын 17%-ке кеміткенде, 20,75-ке тең сан шығады.

2) x санын 27%-ке өсіргенде, 31,75-ке тең сан алынады.

5.165. x -тің қандай мәндерінде: 1) $\frac{x-4}{5}$ өрнегінің мәні $\frac{2x+4}{9} + 9$ өрнегінің сәйкес мәнінен кем?

2) $\frac{x+17}{5}$ өрнегінің мәні $3 \cdot \frac{x-5}{4}$ өрнегінің сәйкес мәнінен артық болмайды?

5.166. Қосындысы 60-қа тең екі санның бірі екіншісінен 4-ке артық. Осы сандардың үлкенін табыңдар.

5.167. Айырмасы 40-қа тең сандардың бірі екіншісінен 3 есе артық. Кіші санды табыңдар.

- 5.168. Әкесі 31 жаста, ал ұлы 5-те. Неше жылдан соң әкесі ұлынан 3 есе үлкен болады?
- 5.169. Алғашында саяжайға бөлінген жер телімі шаршы түрінде болды. Кейінірек бұл жер теліміне тағы да ені 10 м болатын тіктөртбұрышты жер телімі қосылып, үлкейтілген жер телімін үш ораммен қоршап шығу үшін 420 м сым темір қажет болды. Бастапқы бөлінген жер телімінің өлшемі қандай еді?
- 5.170. 1) 4; 2) -5 ; 3) 0; 4) 1 сандары $\frac{x+3}{2} = \frac{3x}{7} - a$ теңдеуінің түбірі болатындай етіп, a -ны анықтаңдар.
- 5.171. $(5; +\infty)$; 2) $(-2; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$ жиыны $4(x-7) > 3x+5+m$ теңсіздігінің шешімі болатындай етіп m -ді анықтаңдар.
- 5.172. Жұмысшы күніне станокпен 16 тетік өңдейтін. Цехқа компьютермен басқарылатын жаңа қондырғы қойылғаннан кейін ол күніне 24 тетік өңдеп, айлық тапсырмасын 8 күн ерте бітірді. Жұмысшы айына неше тетік өңдеуі қажет еді?
- 5.173. Тізбектес үш жұп санның шеткі екеуінің екі еселенген қосындысынан 3-ті азайтсақ, онда 29-ға тең сан алынады. Ортанғы санды табыңдар.
- 5.174. Бір қоймадағы астық мөлшері екіншісінен 2 есе көп. Бір қоймадан 80 т астық алынды, ал екінші қоймаға 40 т астық әкелінді. Осыдан кейін екі қоймадағы астық мөлшері бірдей болды. Алғашында қоймаларда неше тонна астық болған?

С

- 5.175. Әкесінің жасы 40-та, ал ұлдары Асан мен Үсеннің жастары сәйкесінше 12-де және 8-де. Берілген сөйлемдердің математикалық моделін құрыңдар.
- 1) x жылдан кейін әкесінің жасы Асанның жасынан екі есе үлкен болады.
 - 2) y жылдан соң әкесінің жасы Үсеннің жасынан 2 есе үлкен болады.
 - 3) t жыл өткеннен кейін әкесінің жасы Асан мен Үсеннің жастарының қосындысына тең болады.
 - 4) n жыл бұрын Асанның жасы әкесінің жасынан 4 есе кіші еді.
- 5.176. Тіктөртбұрыштың ені ұзындығының 40%-іне тең. Оның ұзындығын 2 см қысқартып, ал енін 4 см арттырса, шығатын тіктөрт-

бұрыш ауданы бастапқы тіктөртбұрыш ауданына тең болады. Бастапқы тіктөртбұрыштың өлшемдерін табыңдар.

- 5.177. Тазартылған (дистильденген) суға 150 г тұз қосқанда 10% -тік тұзды ерітінді алынды. Су мөлшерін анықтаңдар. Осы тұзды неше грамм суға қосқанда 25% -тік тұз ерітіндісі алынады?
- 5.178. *A* және *B* елді мекендері арасын катер өзен ағысымен 5 сағ 30 минутта, сал – 71 сағ 30 минутта жүзіп өтеді. Егер катер өз жылдамдығын 2 км/сағ-қа арттырса, онда ол осы қашықтықты 5 сағ 30 минутта тұнық суда жүзіп өткен болар еді. *A* және *B* елді мекендерінің арақашықтығын табыңдар.
- 5.179. Кептірілген екі жеміс қоспасынан компот әзірленді. Олардың біреуінің бағасы – 400 тг, ал екінші кептірілген жемістің бағасы – 530 тг. Компотқа жұмсалатын қоспаның бағасы 450 теңгеден аспауы үшін бұл жемістерден алынатын жеміс мөлшерінің үлесі қандай болуы қажет?
- 5.180. Қалааралық автобус алғашқы сағатта 70 км/сағ болатын орташа жылдамдықпен жүрді. Өрі қарай осы жылдамдықпен жүре берсе, келесі аялдамаға кестедегі уақыттан жарты сағатқа кешігетінін түсінді. Сөйтіп, ол жылдамдығын 10 км/сағ-қа арттырып, келесі бекетке дер кезінде келді. Автобус қандай жол жүріп өтті?

Қайталауға арналған жаттығулар

- 5.181. Амалдарды орындаңдар.

$$1) 34,68 : (7,11 + 1,56) + 46 : (2,45 - 1,65)$$

$$2) 9\frac{1}{6} : \left(4\frac{1}{3} - 8\right) + 24 \cdot \frac{3}{8}$$

- 5.182. Дүкендегі көгөніс бағасы қазан айында 20% -ке қымбаттады, ал маусым айында қайтадан 20% -ке арзандады. Көгөніс бағасы бұрынғы қалпына келді ме? Жауаптарыңды негіздеңдер. Көгөністің бастапқы бағасы: 1) 150 тг; 2) 250 тг деп алып, оның соңғы бағасын анықтаңдар.
- 5.183. $3x - y = -5$ теңдеуі мен $y = 0,5x - 5$ сызықтық функциясы графигінің қиылысу нүктесін табыңдар.

5.184. Тізбектердің қандай заңдылықпен құрылғанын ауызша сипаттап, оның келесі екі мүшесін жазыңдар.

1) 0,2; 0,04; 0,008; ...

2) 1; 1,5; 1,25; $\frac{7}{8}$; ...

5.185. Бөлшекті периодты ондық бөлшекке айналдырып, оны 0,001-ге дейінгі дәлдікпен жуықтап, жуық мәnnің салыстырмалы қателігін анықтаңдар.

1) $1\frac{1}{3}$

2) $\frac{3}{7}$

3) $2\frac{4}{11}$

4) $5\frac{7}{12}$

5.186. Теңдеулердің графигін салыңдар: 1) $2x - y = 0$; 2) $x + 3y = 6$.

5.187. Ығыспалы қатардың жиіліктер кестесі берілген.

x_i	0	2	4	6
n_i	4	7	6	3

Табу керек:

1) таңдама көлемі мен құлашын;

2) арифметикалық орта мәнін;

3) модасы мен медианасын.

Салыстырмалы жиіліктер кестесін құрыңдар.

Жиіліктер алқабын тұрғызыңдар.

5.188. Өрнектерді көбейткіштерге жіктеңдер.

1) $a^2 + 4ab + 4b^2 - (a + 2b)^3$

2) $36u^2 - (2u - v)^2$

5.189. Сандар тізбегі мүшелерін негізі 3-ке тең болатын дәрежемен алмастырыңдар және бұл тізбектің алдыңғы және соңынан келетін

екі мүшесін жазыңдар: ...; 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$;

5.190. Таңдаманың арифметикалық орта мәнін, құлашын, модасы мен медианасын табыңдар.

1) 11; 10; 8; 10; 8; 12; 11; 8.

2) -3; -5; 5; 1; 2; 4; 3; -1.

**«Қысқаша көбейту формулалары»
бөлімі бойынша тест тапсырмалары**

- Жақшаны ашыңдар: $(2x + 3)^2$.
 A) $4x^2 + 6x + 9$ C) $4x^2 + 12x - 9$
 B) $4x^2 + 12x + 9$ D) $4x^2 - 12x + 9$
- Көбейткіштерге жіктеңдер: $9a^2 - 6ab + b^2$.
 A) $(9a - b)(a - b)$ C) $(3a + b)(3a - b)$
 B) $(3a - b)^2$ D) $(a - 3b)^2$
- $(a + b)^3$ өрнегі үшін қай теңдік тура?
 A) $(a + b)^3 = a^3 + b^3$ B) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 C) $(a + b)^3 = a^2 + 3ab + b^2$ D) $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- Көбейткіштерге жіктеңдер: $9 - 16x^2$.
 A) $(3 - 4x)^2$ C) $(3 + 4x)^2$
 B) $(3 - 4x)(3 + 4x)$ D) Жіктеуге болмайды.
- Өрнекті ықшамдаңдар: $(a + b)^2 - (a - b)^2$.
 A) 0 B) $(a + b)^2$ C) $4ab$ D) $(a - b)^2$
- $3(2x + a)^2 = 12x^2 + 60x + 3a^2$ теңдігіндегі $3(2x + a)^2$ өрнегінің $x = -4$ болғандағы мәнін тауып, есептеңдер.
 A) -24 B) -27 C) 24 D) 27
- $x^3 - 8 = (x - 2) \cdot Q$ екені белгілі болса, Q көпмүшесін табыңдар. Q -дің $x = -1$ болғандағы мәнін есептеңдер.
 A) 3 B) 5 C) -3 D) 1
- Егер қабырғасы x см болатын шаршыдан ені 2 см жолақ кесіп алынса, шыққан тіктөртбұрыштың ауданы шаршы ауданына қарағанда 14 см^2 -ге кем болады. Шаршының периметрін табыңдар.
 A) 36 см B) 32 см C) 24 см D) 28 см
- $x^3 + x^2 - 4x - 4$ өрнегін көбейткіштерге жіктеп, $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ теңдеуін шешіндер.
 A) -2,2 B) -2; -1; 2 C) 2 D) -1; 1
- $y = (x + 4)^2$ және $y = x^2$ функциялары графиктерінің қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар. Осы координаталардың көбейтіндісінің мәні неге тең?
 A) -12 B) -6 C) -8 D) -10

6. РАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕР

6.1. Рационал өрнектерді түрлендіру

6.1.1. Рационал өрнектер. Алдыңғы бөлімдерде қосу, азайту, көбейту және дәрежеге шығару амалдары арқылы құрастырылған, құрамында айнымалылары бар өрнектерді қарастырдық. Мұндай өрнектерді **бүтін өрнектер** деп атадық.

Мысалы, $3ax^2$, $2(x-y)(a^2x+by^2)+cx$, $\frac{ax}{2}-c$ – бүтін өрнектер.

Ал $2a - \frac{b^3}{c-x}$, $\frac{a-x}{a+x} + \frac{2x}{a-x}$, $\frac{8p^2}{11q}$ өрнектерінде жоғарыда аталған

амалдардан басқа *айнымалысы бар өрнектерге бөлу* амалы да бар. Бөлімінде де айнымалылары бар мұндай бөлшектерді **бөлшек өрнектер** дейміз.

Жалпы алғанда, бүтін және бөлшек өрнектерді **рационал өрнектер** деп атайды.

Бүтін өрнектерді көпмүше түріне келтіруге болады және олардың құрамындағы өріптердің кез келген мәндерінде мағыналары бар. Себебі қосу, азайту, көбейту және дәрежеге шығару амалдарының айнымалының кез келген мәндерінде мағынасы бар.

Ал бөлшек өрнектердің айнымалылардың кейбір мәндерінде мағынасы болмауы да мүмкін. Мысалы, $5 + \frac{1}{a}$ өрнегінің $a=0$ болғанда мағынасы жоқ, ал a -ның өзге мәндерінде бұл өрнектің мағынасы бар.

Ал $\frac{x+y}{x-y}$ бөлшегінің мағынасы болуы үшін $x \neq y$ теңсіздігі орындалуы қажет.

Өрнектің мағынасы бар болатындай оның құрамындағы айнымалылардың барлық мәндері жиынын осы өрнектің **мүмкін мәндері жиыны** (ММЖ) деп атайды.

$\frac{a}{b}$ түріндегі өрнекті **рационал өрнек** немесе **алгебралық бөлшек** деп атайды, мұнда a мен b – бүтін өрнектер, b -нің құрамында айнымалылар бар. Мысалы, $\frac{2x}{x^2-5}$, $\frac{3y+1}{7y}$, $\frac{ab-4}{\frac{a}{b}+9}$ – алгебралық бөлшектер.

6.1.2. Бөлшектерді қысқарту. Натурал a , b және c сандары үшін

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

теңдігі орындалатынын жақсы білеміз. Бұл теңдік рационал өрнектер үшін де орындалады.

a , b және c рационал өрнектері үшін

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (1)$$

теңбе-теңдігі орындалады. Мұнда $b \neq 0$, $c \neq 0$.

(1) теңбе-теңдікті дәлелдейік. Айталық, $\frac{a}{b} = m$ болсын. Онда $a = bm$. Осыдан $ac = (bm)c = (bc) \cdot m$, $bc \neq 0$ болғандықтан, $ac = (bc) \cdot m$ теңдігінен бөлшектің анықтамасы бойынша $\frac{ac}{bc} = m$ екені шығады. Олай болса, $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

(1) теңбе-теңдікті *бөлшектердің негізгі қасиеті* деп атайды.

Анықтама. Құрамындағы барлық айнымалылардың мүмкін мәндері жиынында ақиқат болатын теңдікті **теңбе-теңдік** деп атайды. Өрнекті оған теңбе-тең өрнекпен алмастыруды **теңбе-тең түрлендіру** деп атайды.

(1) теңбе-теңдікті пайдаланып, $\frac{ac}{bc}$ бөлшегін c көбейткішіне қысқартуға болады.

1-мысал. а) $\frac{21y}{3y^2}$; ә) $\frac{a^2 - 9}{ab + 3b}$ бөлшектерін қысқартайық.

$$\text{Шешуі: а) } \frac{21y}{3y^2} = \frac{3y \cdot 7}{3y \cdot y} = \frac{7}{y}; \quad \text{ә) } \frac{a^2 - 9}{ab + 3b} = \frac{(a - 3) \cdot (a + 3)}{b(a + 3)} = \frac{a - 3}{b}.$$

2-мысал. $\frac{2x}{7y}$ бөлшегінің бөлімін $35y^3$ түріне келтірейік.

Шешуі: $35y^3 = 7y \cdot 5y^2$ болғандықтан, берілген бөлшектің алымын да, бөлімін де $5y^2$ -қа көбейтеміз (бөлшектің негізгі қасиеті бойынша), сонда:

$$\frac{2x}{7y} = \frac{2x \cdot 5y^2}{7y \cdot 5y^2} = \frac{10xy^2}{35y^3}.$$

Бөлшектің тағы бір қасиетін қарастырайық.

Егер бөлшектің алымының (немесе бөлімінің) таңбасын өзгертсе, онда бөлшектің де таңбасы өзгереді.

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

3-мысал. $\frac{4-a^2}{ac-2c}$ бөлшегін қысқартайық.

$$\text{Шешуі: } \frac{4-a^2}{ac-2c} = \frac{(2-a)(2+a)}{c(a-2)} = -\frac{-(2-a)(2+a)}{c(a-2)} = -\frac{(a-2)(2+a)}{c(a-2)} = -\frac{a+2}{c}.$$

4-мысал. $\frac{ac-2c}{4-a^2}$ бөлшегін қысқартайық.

$$\text{Шешуі: } \frac{ac-2c}{4-a^2} = \frac{c(a-2)}{(2-a)(2+a)} = -\frac{c(a-2)}{-(2-a)(2+a)} = -\frac{c(a-2)}{(a-2)(2+a)} = -\frac{c}{2+a}.$$

5-мысал. x айнымалының қандай мәнінде $\frac{3}{2x+6}$ өрнегінің мәні жоқ?

$$\begin{aligned} \text{Шешуі: } 2x + 6 &= 0 \\ 2x &= -6 \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Жауабы: $x=-3$ мәнінде берілген өрнектің мәні жоқ.

6-мысал. $\frac{x-1}{x^2-9}$ бөлшегіндегі айнымалының мүмкін мәндерін табыңдар.

$$\begin{aligned} \text{Шешуі: } x - 9 &\neq 0 \\ (x - 3)(x + 3) &\neq 0 \\ x &\neq 3 \text{ және } x \neq -3. \end{aligned}$$

Жауабы: берілген бөлшектегі айнымалы -3 пен 3 -тен басқа барлық мәнді қабылдайды.



1. Қандай өрнекті бөлшек өрнек деп атайды?
2. Айнымалының мүмкін мәндері деп нені айтады?
3. Теңбе-теңдік және теңбе-тең түрлендіру деп нені айтады?
4. Бөлшектердің негізгі қасиеттерін дәлелдендер.
5. Бөлшекті қысқартуды мысал арқылы түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

6.1. Өрнекті бөлшек түрінде жазыңдар.

- | | | |
|----------------|-----------------|--------------------|
| 1) $a:7$ | 2) $5:a$ | 3) $x:y$ |
| 4) $(a+b):5$ | 5) $8:(p-q)$ | 6) $(x+y):(m+n)$ |
| 7) $x^2:(a+b)$ | 8) $3a:(2m-5n)$ | 9) $(4x-3y):(x+y)$ |

6.2. a -ның қандай мәндерінде бөлшек нөлге тең?

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\frac{a-3}{4}$ | 2) $\frac{a+3}{a-3}$ | 3) $\frac{a-3}{a}$ | 4) $\frac{a+0,1}{3a-1}$ |
| 5) $\frac{3a-2}{2a}$ | 6) $\frac{a(a-4)}{a+15}$ | 7) $\frac{(a+3)(a-3)}{2a-5}$ | 8) $\frac{(a+1)(a+5)}{a-3}$ |

6.3. x -тің қандай мәндерінде бөлшектің мәні болмайды?

- | | | | |
|----------------------|----------------------------|---------------------|-----------------------|
| 1) $\frac{3}{x-2}$ | 2) $\frac{4}{x+1}$ | 3) $\frac{2x}{x-3}$ | 4) $\frac{x+1}{2x-4}$ |
| 5) $\frac{x+1}{x-1}$ | 6) $\frac{4-x}{3-x}$ | 7) $\frac{1}{x-a}$ | 8) $\frac{1}{x+b}$ |
| 9) $\frac{1}{x^2-1}$ | 10) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ | | |

6.4. Бөлшектегі айнымалының мүмкін мәндерін табыңдар.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1) $\frac{3}{2x+6}$ | 4) $\frac{1}{x-3}$ |
| 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$ | 5) $\frac{5x}{x^2+1}$ |
| 3) $\frac{3}{x^2+8x+16}$ | 6) $\frac{x-5}{x^2-5x}$ |

6.5. Егер x пен y -тің әрбір мәнін екі еселесек, онда бөлшектің мәні өзгере ме?

- | | | | |
|----------------------|--------------------|---------------------|-------------------------------|
| 1) $\frac{x-y}{x+y}$ | 2) $\frac{x^2}{y}$ | 3) $\frac{3x^2}{y}$ | 4) $\frac{4x^2-y^2}{x^2+y^2}$ |
|----------------------|--------------------|---------------------|-------------------------------|

6.6. Бөлшектерді қысқартыңдар.

1) $\frac{15a}{20b}$

2) $\frac{ab}{ac}$

3) $\frac{6xy}{8x}$

4) $\frac{10mn}{15mp}$

5) $\frac{8bx}{16by}$

6) $\frac{2a^2}{3ab}$

7) $\frac{24m^3}{16m^2n}$

8) $\frac{-2xy}{5x^2y}$

9) $\frac{8a^2y^2}{24ay}$

10) $\frac{63a^2b^2}{42a^6b^4}$

6.7. Бөлуді бөлшек түрінде жазып, оны қысқартыңдар.

1) $4a^2b^2 : (2a^4b^2)$

2) $24p^4q^4 : (48p^4q^2)$

3) $-ax^2 : (xy)$

4) $3xy^2 : (6x^3y^3)$

5) $36nm^2 : (18mn)$

6) $-6ax : (-18ax)$

7) $6ab^2 : (9bc^2)$

8) $3axy : (6ay^3)$

9) $-32b^5c : (12b^4 \cdot c^2)$

10) $(6xy - 18x^2) : (y - 3x)^3$

6.8. Бөлшектерді қысқартыңдар.

1) $\frac{3a + 12b}{6ab}$

2) $\frac{15b - 20c}{10b}$

3) $\frac{2a - 4}{3(a - 2)}$

4) $\frac{15x(y + 2)}{6y + 12}$

5) $\frac{a - 3b}{a^2 - 3ab}$

6) $\frac{3x^2 + 15xy}{x + 5y}$

7) $\frac{y^2 - 16}{3y + 12}$

8) $\frac{5x - 15y}{x^2 - 9y^2}$

9) $\frac{(c + 2)^2}{7c^2 + 14c}$

10) $\frac{6cb - 18c^2}{(b - 3c)^3}$

11) $\frac{(a + 5)^2}{a^2 - 25}$

12) $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$

6.9. Бөлшектерді қысқартып алып, мәнін табыңдар.

1) $\frac{15a^2 - 10ab}{3ab - 2b^2}$, мұндағы $a = -2$; $b = -0,1$

2) $\frac{9c^2 - 4b^2}{18c^2 - 12bc}$, мұндағы $b = 0,5$; $c = \frac{2}{3}$

6.10. Бөлшектерді қысқартыңдар.

1) $\frac{3a(a + b)^2}{9a^2(a + b)}$

2) $\frac{10a^2b(x - y)^2}{15a^4b(x - y)^3}$

3) $\frac{7a^3b^3(a + b)}{21a^2b^3(a + b)^3}$

$$4) \frac{3(a-b)(a-c)^2}{6(a-b)(a-c)}$$

$$5) \frac{x(y-z)^2}{x(y-z)}$$

$$6) \frac{8m(a+b)}{4m(a+b)}$$

6.11. Бөлшектердің мәнін өзгертпей, оның алымы мен бөлімінде минус таңбасы болмайтындай етіп түрлендіріңдер.

$$1) \frac{-2x}{-5y}$$

$$2) \frac{8c^2}{-15x}$$

$$3) -\frac{-3m}{4n}$$

$$4) -\frac{-a}{-b}$$

$$5) -\frac{3a^2b}{-10m}$$

$$6) -\frac{-5ab}{8cd}$$

В

6.12. Теңдіктердің ақиқаттығын тексеріңдер.

$$1) \frac{x-2}{y-4} = \frac{2-x}{4-y} = -\frac{x-2}{4-y} = -\frac{2-x}{y-4}$$

$$2) \frac{m}{(x-m)(x-n)} = \frac{m}{(m-x)(n-x)} = -\frac{m}{(x-m)(n-x)}$$

6.13–6.20-есептердегі бөлшектерді қысқартыңдар.

$$6.13. 1) \frac{x+x^2}{x^2-1}$$

$$2) \frac{a-a^2}{a^2-1}$$

$$3) \frac{(a-b)^2}{b^2-a^2}$$

$$4) \frac{m^2-n^2}{(n+m)^2}$$

$$6.14. 1) \frac{a^2-1}{1-a}$$

$$2) \frac{m-n}{(n-m)^2}$$

$$3) \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$$

$$4) \frac{a^2-1}{(a-1)^2}$$

$$6.15. 1) \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$2) \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

$$3) \frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$$

$$4) \frac{5m^2+10mn+5n^2}{15m^2-15n^2}$$

$$6.16. 1) \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$$

$$2) \frac{m^3-n^3}{m^2-n^2}$$

$$3) \frac{2a^3-2b^3}{5a^2-5b^2}$$

$$4) \frac{3p^2-3q^2}{6p^3+6q^3}$$

$$6.17. 1) \frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$$

$$2) \frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$$

3) $\frac{a^3 - b^3}{a^4 - b^4}$

4) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 - b^3}$

6.18. 1) $\frac{5a^3b + 5ab^3}{a^4 - b^4}$

2) $\frac{a^4 - b^4}{ab^2 - a^3}$

3) $\frac{2a + 4}{a^3 + 8}$

4) $\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}$

6.19. 1) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2a^4 - 2b^4}$

2) $\frac{1 - 2x + x^2}{x^2 - 1}$

3) $\frac{3n^2 - 3m^2}{6m^3 + 6n^3}$

4) $\frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2}$

6.20. 1) $\frac{x^6 + x^4}{x^4 + x^2}$

2) $\frac{x^6 - x^8}{x^4 - x^2}$

3) $\frac{m^7 - m^{10}}{m^9 - m^3}$

4) $\frac{a^6 - a^4}{a^3 + a^2}$

6.21. $\frac{5b}{8a^3}$; $\frac{7a}{3b^2}$; $\frac{1}{2ab}$; $\frac{2}{a^2b^2}$ бөлшектерінің бөлімін $24a^3b^2$ түріне келтіріңдер.

6.22. Есептеңдер.

1) $\frac{a^2 - 8a + 16}{ax - 4x}$, мұндағы $a = -5$, $x = -2$

2) $\frac{3x^2 - xy}{9x^2 - 6xy + y^2}$, мұндағы $x = \frac{3}{4}$, $y = -\frac{2}{3}$

6.23. Теңдеулерді шешіңдер.

1) $ax - 2x = a^2 - 4$, $a \neq 2$

2) $cx - dx = 5c - 5d$, $d \neq c$

3) $cbx - abx = b^2c - ab^2$; $b \neq 0$; $c \neq a$

4) $ax - bx = a^2 - b^2$, $a \neq b$

С

6.24. Бөлшектерді қысқартыңдар.

$$1) \frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by}$$

$$2) \frac{ac - bc + ad - bd}{ac + bc + ad + bd}$$

$$3) \frac{ab + ac + b^2 + bc}{ax + ay + bx + by}$$

$$4) \frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c}$$

6.25. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{m^2 + n^2 - k^2 + 2mn}{m^2 - n^2 + k^2 + 2mk}$$

$$2) \frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^4 - 2a^2 + 1}$$

$$3) \frac{1 - 3b + 3b^2 - b^3}{c - cb + a - ab}$$

$$4) \frac{x^2 - ax + bx - ab}{x^3 + bx^2 + ax + ab}$$

6.26. Есептеңдер.

$$1) \frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c}, \text{ мұндағы } a=-3; b=5; c=3,4$$

$$2) \frac{x^3 + x^2y}{x^2 + 2xy + y^2}, \text{ мұндағы } x=3; y=-2$$

6.27. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$1) \frac{ac + bx + ax + bc}{ay + 2bx + 2ax + by} = \frac{x+c}{2x+y}$$

$$2) \frac{x - xy + z - zy}{1 - 3y + 3y^2 - y^3} = \frac{x+z}{(1-y)^2}$$

$$3) \frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5} = \frac{1}{3a^2 - b^2}$$

6.28. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) a^2x - b^2x = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2) 3mx + 3nx = 6m^2 - 6n^2$$

$$3) ax + x = a^2 + 2a + 1$$

$$4) m^2x + 2mnx + n^2x = 3m^2 - 3n^2$$

6.29. Бөлшектерді қысқартыңдар.

$$1) \frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 + 4a + 4}$$

$$2) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 6x + 5}$$

$$3) \frac{m^2 + 2m + 1}{m^2 + 8m + 7}$$

6.30. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{a^2 - 7a + 12}{a^2 - 6a + 9}$$

$$2) \frac{2xy - x^2 - y^2 + a^2}{x^2 + a^2 - y^2 + 2ax}$$

$$3) \frac{m^3 - m^2n + mn^2}{m^3 + n^3}$$

6.2. Рационал өрнектердің қосындысы мен айырмасы

6.2.1. Бөлімдері бірдей бөлшектердің қосындысы мен айырмасы

Бөлімдері бірдей жай бөлшектерді қосқанда, олардың алымдары қосылып, бөлімдері өзгеріссіз қалатынын жақсы білеміз: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$.

Бөлімдері бірдей бөлшек өрнектер де осы сияқты қосылады:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad (1)$$

(1) теңбе-теңдікті дәлелдейік. $\frac{a}{c} = m$ және $\frac{b}{c} = n$ болсын. Онда $a=cm$ және $b=cn$ болады. Осыдан $a+b=cm+cn=c(m+n)$. $c \neq 0$ болғандықтан, $\frac{a+b}{c} = m+n$. Екінші жағынан, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = m+n$, яғни $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = m+n = \frac{a+b}{c}$.

Осы сияқты, кез келген $\frac{a}{c}$ және $\frac{b}{c}$ бөлімдері бірдей бөлшектері үшін мына теңбе-теңдік орындалады:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad (2)$$

Шынында да, $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{(-b)}{c} = \frac{a+(-b)}{c} = \frac{a-b}{c}$.

• Бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу үшін олардың алымдарын қосып, бөлімін өзгеріссіз қалдыру керек.

• Бөлімдері бірдей бөлшектерді азайту үшін бірінші бөлшектің алымынан екінші бөлшектің алымын азайтып, бөлімін өзгеріссіз қалдыру керек.

1-мысал. $\frac{3a-7b}{15ab}$ және $\frac{2a+2b}{15ab}$ бөлшектерін қосайық.

Шешуі:

$$\frac{3a-7b}{15ab} + \frac{2a+2b}{15ab} = \frac{3a-7b+2a+2b}{15ab} = \frac{5a-5b}{15ab} = \frac{5(a-b)}{15ab} = \frac{a-b}{3ab}.$$

2-мысал. $\frac{a^2+9}{5a-15}$ бөлшегінен $\frac{6a}{5a-15}$ бөлшегін азайту керек.

Шешуі: $\frac{a^2+9}{5a-15} - \frac{6a}{5a-15} = \frac{a^2+9-6a}{5a-15} = \frac{(a-3)^2}{5(a-3)} = \frac{a-3}{5}.$

6.2.2. Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді қосу және азайту

Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді қосу үшін, алдымен оларды ортақ бөлімге келтіріп, содан соң (1) формула бойынша қосады. Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді де осы сияқты қосады.

Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді қосу үшін оларды ортақ бөлімге келтіріп, содан соң бөлімдері бірдей бөлшектер сияқты қосады.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad (3)$$

(3) теңбе-теңдікті дәлелдейік. $b \neq 0$, $d \neq 0$ болғандықтан, бөлшектердің негізгі қасиеті бойынша:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді де осы сияқты азайтады.

Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді азайту үшін оларды ортақ бөлімге келтіріп, содан соң бөлімдері бірдей бөлшектерді азайту сияқты орындайды.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad (4)$$

Бұл да (3) теңбе-теңдік сияқты дәлелденеді.

3-мысал. $\frac{x}{4a^3b}$ және $\frac{5}{6ab^4}$ бөлшектерінің қосындысын табайық.

Шешуі: бұл бөлшектердің бөлімдерін ортақ бөлімге, яғни $12a^3b^4$ түріне келтіреміз. Сонда

$$\frac{x}{4a^3b} + \frac{5}{6ab^4} = \frac{x \cdot 3b^3}{4a^3b \cdot 3b^3} + \frac{5 \cdot 2a^2}{6ab^4 \cdot 2a^2} = \frac{3xb^3}{12a^3b^4} + \frac{10a^2}{12a^3b^4} = \frac{3xb^3 + 10a^2}{12a^3b^4}.$$

4-мысал. $\frac{a+3}{a^2+ab}$ және $\frac{b-3}{ab+b^2}$ бөлшектерінің айырмасын табайық.

Шешуі:

$$\begin{aligned} \frac{a+3}{a^2+ab} - \frac{b-3}{ab+b^2} &= \frac{a+3}{a(a+b)} - \frac{b-3}{b(a+b)} = \frac{b(a+3)}{ab(a+b)} - \frac{a(b-3)}{ab(a+b)} = \\ &= \frac{ab+3b-ab+3a}{ab(a+b)} = \frac{3a+3b}{ab(a+b)} = \frac{3(a+b)}{ab(a+b)} = \frac{3}{ab}. \end{aligned}$$

5-мысал. $a-1 - \frac{a^2-3}{a+1}$ өрнегін ықшамдайық.

$$\begin{aligned} \text{Шешуі: } a-1 - \frac{a^2-3}{a+1} &= \frac{a-1}{1} - \frac{a^2-3}{a+1} = \frac{(a-1)(a+1) - (a^2-3)}{a+1} = \\ &= \frac{a^2-1-a^2+3}{a+1} = \frac{2}{a+1}. \end{aligned}$$



1. Бөлімдері бірдей бөлшектерді қалай қосады?
2. Бөлімдері бірдей бөлшектердің айырмасын қалай табады?
3. (1) және (2) формулаларды дәлелдеңдер.
4. Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді қалай қосады?
5. Бөлімдері әртүрлі бөлшектердің айырмасын қалай табады?
6. (3) және (4) формулаларды дәлелдеңдер.

Жаттығулар

A

6.31–6.40-есептерде көрсетілген амалдарды орындаңдар.

6.31. 1) $\frac{x-3}{4} + \frac{a+1}{4}$

2) $\frac{m+n}{a} - \frac{m-n}{a}$

3) $\frac{5x+1}{2} - \frac{x}{2}$

4) $\frac{x-1}{4} + \frac{x+2}{4} - \frac{x-3}{4}$

5) $\frac{3p-2q}{m} - \frac{p-q}{m}$

6) $\frac{2a+1}{b} + \frac{3a+1}{b} - \frac{a-2}{b}$

$$6.32. \quad 1) \frac{a+b}{x+a} + \frac{a-b}{x+a}$$

$$2) \frac{b+4}{a-2} + \frac{b+3}{a-2}$$

$$3) \frac{1-x}{m-n} - \frac{1-3x}{m-n}$$

$$4) \frac{3a+1}{a+b} - \frac{2a+3}{a+b}$$

$$6.33. \quad 1) \frac{a-x}{m} + \frac{b+x}{m}$$

$$2) \frac{a-3b}{n} + \frac{4b-a}{n}$$

$$3) \frac{x-bp}{p} - \frac{x+bp}{p}$$

$$4) \frac{c+qy}{q} - \frac{c-2qy}{q}$$

$$6.34. \quad 1) \frac{ax-y}{a+b} + \frac{y+bx}{a+b}$$

$$2) \frac{n+mx}{m+3} - \frac{n-3x}{m+3}$$

$$3) \frac{px-3q}{x-y} + \frac{py-3q}{y-x}$$

$$4) \frac{2cx+b}{2c-3} + \frac{3x+b}{3-2c}$$

$$6.35. \quad 1) \frac{a}{x-1} + \frac{b}{1-x}$$

$$2) \frac{2x}{a-b} - \frac{x}{b-a}$$

$$3) \frac{x}{2m-n} + \frac{y}{n-2m}$$

$$4) \frac{5b^2}{x-2} - \frac{2b^2}{2-x}$$

$$6.36. \quad 1) \frac{a}{x^2-1} - \frac{b}{1-x^2}$$

$$2) \frac{c+d}{c^2-b^2} + \frac{c-d}{b^2-c^2}$$

$$3) \frac{a}{x-y} - \frac{b}{y-x} + \frac{c}{x-y}$$

$$4) \frac{x+1}{a-b} - \frac{x+2}{b-a} - \frac{x-1}{a-b}$$

$$6.37. \quad 1) \frac{1}{4x} + \frac{1}{2y}$$

$$2) \frac{5}{3a} - \frac{2}{9b}$$

$$3) \frac{a}{6m} + \frac{b}{8n}$$

$$4) \frac{x}{12a} - \frac{y}{18b}$$

$$6.38. \quad 1) \frac{x}{ab} + \frac{x}{ac}$$

$$2) \frac{a}{xy} - \frac{b}{xz}$$

$$3) \frac{2m}{ax} + \frac{3n}{bx}$$

$$4) \frac{5a}{mn} - \frac{3b}{mp}$$

$$6.39. \quad 1) \frac{2x-3y}{x} + \frac{4x^2-5y^2}{xy}$$

$$2) \frac{5a^2-b^2}{ab} - \frac{3a-2b}{b}$$

$$3) \frac{2b^2+3ax}{bx} - \frac{ab+5bx}{ax}$$

$$4) \frac{3p^2+5mn}{mp} + \frac{n^2-3mp}{np}$$

6.40. 1) $\frac{2a}{x^2} - \frac{3}{x}$ 2) $\frac{5x}{a^2} - \frac{2y}{a^3}$ 3) $\frac{1}{m^4n^3} + \frac{2}{m^3n^4}$ 4) $\frac{3}{x^3y^3} - \frac{4}{x^4y^2}$

6.41. Бөлшек пен бүтін өрнектің қосындысы немесе айырмасы түрінде жазыңдар.

1) **Үлгі:** $\frac{a+3}{a} = \frac{a}{a} + \frac{3}{a} = 1 + \frac{3}{a}$.

2) $\frac{x+c^2}{c^2}$ 3) $\frac{m^2-2m+4}{m}$ 4) $\frac{a^2+3a-6}{a}$

В

6.42. n -нің қандай мәндерінде:

1) $\frac{n+12}{n}$; 2) $\frac{5n-9}{n}$; 3) $\frac{n^2+2n+3}{n}$ бөлшектерінің мәні натурал сан болады?

6.43. Өрнектерді ықшамдаңдар.

1) $\frac{a}{2x} - \frac{b}{3x^2}$ 2) $\frac{5x}{ab} + \frac{2y}{3a^2b} - \frac{3}{6a^2b^2}$
 3) $\frac{3x}{4a^2b} + \frac{5x}{2ab^2} - \frac{7}{6a^2b}$ 4) $\frac{5a}{6b^2c} - \frac{7b}{12ac^2} + \frac{11c}{18a^2b}$

6.44. Өрнектерді ықшамдаңдар.

1) $\frac{2a-3b}{a^2b} - \frac{4a-5b}{ab^2}$ 2) $\frac{5x^2-3y}{x^2y} + \frac{6x-2y^2}{x^2y^2}$
 3) $\frac{5(2a-b)}{8} - \frac{3(a-4b)}{2} + \frac{7(a-b)}{6}$ 4) $\frac{(x+y)^2}{6} + \frac{(x-y)^2}{12} - \frac{x^2-y^2}{4}$

6.45. Өрнектерді бөлшекке түрлендіріңдер.

1) $m + \frac{1}{n}$ 2) $\frac{x}{y} - x$ 3) $\frac{a^2+b}{a} - a$
 4) $a - \frac{ab-a}{b}$ 5) $\frac{2a^2b-b}{a} - ab$ 6) $a - \frac{b}{x} - \frac{a}{x^2}$
 7) $5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 8) $a - \frac{a-1}{2} + \frac{a-2}{3}$

6.46. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 7$$

$$2) \frac{2x}{5} + \frac{x}{2} = 9$$

$$3) \frac{5x}{4} - \frac{x}{2} = 3$$

$$4) \frac{4x}{5} - \frac{x}{10} = 7$$

$$5) \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 38$$

$$6) \frac{2x}{3} + \frac{5x}{2} = 19$$

6.47. Есептендер.

$$1) \frac{a^2 + 1}{a - 3} - \frac{10}{a - 3}, \text{ мұндағы } a=97$$

$$2) \frac{x + 7}{x^2 - 25} - \frac{2x + 2}{x^2 - 25}, \text{ мұндағы } x=-5,1$$

6.48–6.57-есептерде көрсетілген амалдарды орындаңдар.

$$6.48. 1) \frac{3}{x+y} - \frac{5}{x}$$

$$2) \frac{4}{a-b} + \frac{1}{a}$$

$$3) \frac{6}{m-1} - \frac{2}{m}$$

$$4) \frac{1}{b+2} - \frac{3}{b}$$

$$6.49. 1) \frac{1}{b+2} - \frac{3}{b}$$

$$2) \frac{7x}{2(x-1)} + \frac{5x}{x-1}$$

$$3) \frac{9a}{4(a+2)} - \frac{1}{a+2}$$

$$4) \frac{2a^2}{3(a+1)} + \frac{5a^2}{4(a+1)}$$

$$5) \frac{4x}{5(x-3)} - \frac{3x}{2(x-3)}$$

$$6.50. 1) \frac{1}{2a-b} - \frac{1}{2a+b}$$

$$2) \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{3m+n}$$

$$3) \frac{5}{x-y} - \frac{3}{x+y}$$

$$4) \frac{4}{p+q} + \frac{2}{p-q}$$

$$6.51. 1) \frac{2m}{5m+5n} + \frac{3n}{5m-5n}$$

$$2) \frac{7x}{3x+3y} - \frac{2x}{3x-3y}$$

$$3) \frac{5b}{ax+ay} - \frac{2a}{bx+by}$$

$$4) \frac{3x}{4x+4y} - \frac{6x}{8x+8y}$$

$$6.52. 1) \frac{7a}{x^2-9} + \frac{5a}{x-3} + \frac{a}{x+3}$$

$$2) \frac{4}{x+2} + \frac{3}{x-2} - \frac{x+2}{x^2-4}$$

$$3) \frac{a}{1-b} - \frac{a}{1+b} + \frac{a}{1-b^2}$$

$$4) \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2} - \frac{4}{a^2-4}$$

$$6.53. \quad 1) \frac{3}{2m+6} - \frac{m-2}{m^2+6m+9}$$

$$2) \frac{5-a}{a^2-8a+16} + \frac{6}{5a-20}$$

$$3) \frac{1}{2x+2} - \frac{x-1}{3x^2+6x+3}$$

$$4) \frac{4}{3m-3n} + \frac{3m-n}{2m^2-4mn+2n^2}$$

C

$$6.54. \quad 1) \frac{1}{x-2a} + \frac{1}{x+2a} + \frac{8a^2}{4a^2x-x^3}$$

$$2) \frac{4x-3}{3-2x} - \frac{4+5x}{3+2x} - \frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$$

$$3) \frac{4a^2-3a+5}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} + \frac{6}{1-a}$$

$$4) \frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{2a-4a^2}$$

$$6.55. \quad 1) \frac{1}{6x-4y} - \frac{1}{6x+4y} - \frac{3x}{4y^2-9x^2}$$

$$2) \frac{3a+2}{a^2-2a+1} - \frac{6}{a^2-1} - \frac{3a-2}{a^2+2a+1}$$

$$3) \frac{3}{x^2+2xy+y^2} - \frac{4}{x^2-2xy+y^2} + \frac{5}{x^2-y^2}$$

$$4) \frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3} - \frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$$

$$6.56*. \quad 1) \frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(b-c)(a-c)} - \frac{1}{(c-a)(b-a)}$$

$$2) \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} - \frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-x)(y-z)}$$

$$6.57*. \quad 1) \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

$$2) \frac{x^2}{(x-y)(x-u)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-u)} + \frac{u^2}{(u-x)(u-y)}$$

6.58. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$1) \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} = 0$$

$$2) \frac{ax+by}{(a-b)(x+y)} - \frac{bx-ay}{(a+b)(x+y)} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

6.59. $\frac{x}{y} = 5$ деп алып, бөлшектердің мәнін табыңдар.

$$1) \frac{x+y}{y} \quad 2) \frac{x-y}{y} \quad 3) \frac{y}{x} \quad 4) \frac{x+2y}{x}$$

6.60. $\frac{x+y}{y} = 2$ деп алып, бөлшектердің мәнін табыңдар.

$$1) \frac{x}{y} \quad 2) \frac{y}{x+y} \quad 3) \frac{x-y}{x} \quad 4) \frac{y}{x}$$

6.61. Егер $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ және $\frac{a^2-2b}{a(1-2b)} = \frac{b^2-2a}{b(1-2a)}$ болса, онда $a+b+1,5 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

6.62. Тізбектес үш натурал санның кубтарының қосындысы мен осы сандардың үш еселенген көбейтіндісінің айырмасын сол сандардың арифметикалық орта мәніне бөлгендегі бөліндіні табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.63. 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$; 3) $y = -\frac{1}{3}x^3$ формуласымен берілген функциялардың графигін салыңдар.

6.64. Көбейткіштерге жіктеңдер: 1) $a^2+b^2-2ab-c^2$; 2) a^2-16+b^2-2ab .

6.65. Теңдеуді шешіңдер: $12x^2-5x+(1+3x)(1-3x)-3(x-2)(x+3)-6=21$.

6.3. Рационал өрнектерді көбейту және бөлу

6.3.1. Бөлшектерді көбейту. $\frac{a}{b}$ және $\frac{m}{n}$ бөлшектерін көбейтуді мына формула бойынша орындайды:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n} \quad (1)$$

Шынында да, $\frac{a}{b} = p$, $\frac{m}{n} = q$ болсын. Осыдан $a=bp$, $m=nq$ және $am=(bp)(nq)=(bn)(pq)$. $b \neq 0$, $n \neq 0$ болғандықтан, $bn \neq 0$.

Онда $\frac{am}{bn} = pq$.

Екінші жағынан, $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = pq$, яғни (1) теңбе-теңдіктің орындалатынын байқадық.

Бөлшектерді көбейту үшін олардың алымдарының көбейтіндісін алымына, ал бөлімдерінің көбейтіндісін бөліміне жазу керек.

1-мысал. $\frac{a^3}{4b^2}$ және $\frac{6b}{a^2}$ бөлшектерін көбейту керек.

Шешуі: $\frac{a^3}{4b^2} \cdot \frac{6b}{a^2} = \frac{a^3 \cdot 6b}{4b^2 \cdot a^2} = \frac{3a}{2b}$.

2-мысал. $\frac{pt+2p}{m}$ бөлшегін $\frac{pm^2}{m^2-4}$ бөлшегіне көбейтейік.

Шешуі:

$$\frac{pt+2p}{m} \cdot \frac{pm^2}{m^2-4} = \frac{(pt+2p) \cdot pm^2}{m(m^2-4)} = \frac{p^2m(m+2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{p^2m}{m-2}.$$

3-мысал. $\frac{x+a}{x-a}$ бөлшегін x^2-a^2 екімүшесіне көбейту керек.

Шешуі: $\frac{x+a}{x-a} \cdot (x^2-a^2) = \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x^2-a^2}{1} = \frac{(x+a)(x^2-a^2)}{x-a} =$
 $= \frac{(x+a)(x+a)(x-a)}{x-a} = (x+a)^2.$

6.3.2. Бөлшектерді бөлу. $\frac{a}{b}$ бөлшегін $\frac{m}{n}$ бөлшегіне бөлуді мына формула бойынша орындайды:

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{bm} \quad (2)$$

Бөлшекті бөлшекке бөлу үшін бірінші бөлшекті екінші бөлшекке кері бөлшекке көбейту керек.

(2) формуланың дәлелдеуі: $\frac{a}{b} = p$, $\frac{m}{n} = q$ болсын. Онда $\frac{n}{m} = \frac{1}{q}$. Сондықтан (1) формула бойынша $\frac{an}{bm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = p \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}$. Мұнда $b \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq 0$, $q \neq 0$ теңсіздіктері ескерілді. Екінші жағынан, $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = p : q = \frac{p}{q}$, яғни (2) формула орындалады.

4-мысал. $\frac{7a^2}{b^2}$ бөлшегін $\frac{14a}{b}$ бөлшегіне бөлу қажет.

$$\text{Шешуі: } \frac{7a^2}{b^2} : \frac{14a}{b} = \frac{7a^2}{b^2} \cdot \frac{b}{14a} = \frac{7a^2b}{b^2 14a} = \frac{a}{2b}.$$

5-мысал. $\frac{a^2 - 9}{3y}$ бөлшегін $a + 3$ екімүшесіне бөлейік.

Шешуі:

$$\frac{a^2 - 9}{3y} : (a + 3) = \frac{a^2 - 9}{3y} : \frac{a + 3}{1} = \frac{a^2 - 9}{3y} \cdot \frac{1}{a + 3} = \frac{(a - 3)(a + 3)}{3y(a + 3)} = \frac{a - 3}{3y}.$$



1. Бір бөлшекті екінші бөлшекке қалай көбейтеді?
2. (1) формуланы дәлелдеңдер.
3. Бір бөлшекті екінші бөлшекке қалай бөледі?
4. (2) формуланы дәлелдеңдер.

Жаттығулар

A

6.66–6.79-есептерде көрсетілген амалдарды орындаңдар.

$$\begin{array}{llll} \text{6.66. 1) } \frac{18}{35} \cdot \frac{5}{6} & 2) \frac{5}{6} : \frac{2}{3} & 3) \frac{a}{b} : \frac{m}{n} & 4) \frac{x}{y} \cdot \frac{p}{q} \\ 5) \frac{1}{a} : b & 6) c : \frac{1}{x} & 7) \frac{1}{m} \cdot n & 8) 2 \cdot \frac{1}{a} \end{array}$$

6.67. 1) $\frac{9a}{16b} \cdot \frac{2}{3}$

2) $3m \cdot \frac{n}{12m}$

3) $\frac{8c}{21d^2} : \frac{6c^2}{7d}$

4) $5a : \frac{15a}{b}$

5) $\frac{x^4}{y^3} \cdot \frac{y^2}{x^3}$

6) $\frac{3mn}{4ab} \cdot \frac{10a^2b^2}{21m^2n}$

7) $\frac{12ab}{25c} : 8a^2$

8) $\frac{5c}{28a^2} \cdot 21ac$

6.68. 1) $\frac{5}{4x} \cdot \frac{2x}{3}$

2) $\frac{a^2}{8} \cdot \frac{4}{a}$

3) $\frac{6b}{7y} \cdot \frac{14}{3b}$

4) $\frac{p^2}{18} \cdot \frac{36}{p}$

5) $\frac{9}{2m} \cdot \frac{5m}{3}$

6) $\frac{12}{7p} \cdot \frac{p^3}{12q}$

6.69. 1) $\frac{48a^4}{49b^4} \cdot \frac{7b^2}{16a^2}$

2) $\frac{2n}{5m^3} \cdot 10m^5$

3) $\frac{25y^2}{16x} : \frac{y^3}{x^2}$

4) $6xy^2 : \frac{3y^2}{4x}$

6.70. 1) $\frac{72a^4}{25b^5} \cdot \left(-\frac{5b^4}{27a^5}\right)$

2) $-\frac{15m^4}{8n^6} \cdot \frac{16n^5}{25m^3}$

3) $\frac{11a}{4b^2} : (22a^2)$

4) $\frac{9p^2}{20q^3} : \frac{p^5}{16q}$

6.71. 1) $-\frac{18x^2y^2}{5abm} : \left(-\frac{9xy^3}{5a^2m^4}\right)$

2) $35m^2n : \frac{7m^3}{24}$

3) $\frac{13a}{12xy^2} \cdot 4x^2y$

4) $-\frac{18p^3}{11q^3} : \frac{9p^2}{22q^4}$

5) $6ax^2 : \frac{3x^2}{4a}$

6) $\frac{x^2y^2}{11ab^2} : \left(-\frac{4xy^3}{33ab}\right)$

6.72. 1) $8x^2y^4 \cdot \left(-\frac{3x}{4y^3}\right)$

2) $-\frac{18x^2y^2}{5ab} : \frac{6xy^3}{5a^2b^2}$

3) $16a^2b^3 : \left(-\frac{20a^5b^4}{3x^2y}\right)$

4) $-\frac{25x^4y^3}{14m^2} \cdot \left(-\frac{21mn}{10x^3y^2}\right)$

$$5) \frac{a^2 - ab}{b} \cdot \frac{b^2}{a}$$

$$6) \frac{ab + b^2}{9} \cdot \frac{3a}{b^2}$$

$$6.73. \quad 1) \frac{a^2 - b^2}{6a^2b^2} : \frac{a + b}{3ab}$$

$$2) \frac{x^2 + xy}{x} : \frac{xy + y^2}{y}$$

$$3) \frac{a^2b - 4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a^2 - 2ab}$$

$$4) \frac{4m^2 - 9n^2}{m^2n^2} : \frac{2am + 3an}{2mn}$$

$$5) \frac{x^2 - xy}{x^2 + xy} \cdot \frac{x^2y + xy^2}{xy}$$

$$6) \frac{c + d}{c - d} : \frac{c^2 + cd}{2c^2 - 2d^2}$$

В

$$6.74. \quad 1) \frac{(a + 3)^2}{2a - 4} \cdot \frac{a^2 - 4}{3a + 9}$$

$$2) \frac{m^2 - 4n^2}{mn} : \frac{m^2 - 4n^2}{3n}$$

$$3) \frac{p^2 - q^2}{2pq} \cdot \frac{4p}{p + q}$$

$$4) \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4} : \frac{3x + 12}{x - 2}$$

$$5) \frac{3x^2 - 3y^2}{x^2 + ax} : \frac{6x - 6y}{x + a}$$

$$6) (2x - u)^2 : \frac{4x^3 - xu^2}{3}$$

$$6.75. \quad 1) \frac{ab^2 - ac^2}{2a + 8} \cdot \frac{3a + 12}{ab + ac}$$

$$2) \frac{4x^2 - 25y^2}{x^3 + 8} : \frac{2x + 5y}{x^2 - 2x + 4}$$

$$3) \frac{m^3 - n^3}{m + n} \cdot \frac{m^2 - n^2}{m^2 + mn + n^2}$$

$$4) \frac{p^2 + pq + q^2}{p - 1} : \frac{p^3 - q^3}{p^2 - 1}$$

$$6.76. \quad 1) \frac{9xy}{5ab} \cdot \frac{3ab}{4yz} \cdot \frac{4bz}{3axy}$$

$$2) \left(\frac{2ax}{yz} : \frac{3bx}{ay} \right) : \frac{9b^2z}{8a^2xy}$$

$$3) \left(\frac{8b^2cd}{9a^5} : \frac{7cd}{12a^3} \right) \cdot \frac{28a^4}{3b^2}$$

$$4) \left(\frac{3p^2mq}{2a^2b^2} \cdot \frac{3abc}{8x^2y^2} \right) : \frac{9a^2b^2c^3}{28pxy}$$

$$6.77. \quad 1) \frac{m^5 + m^4 + m^3}{m^3 + m^2} \cdot \frac{m^5 + m^4}{m^4 + m^3 + m^2}$$

$$2) \frac{n^2 - n^4 + n^6}{1 - n} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^5 - n^3 + n}$$

$$3) \frac{a - a^3}{a^6 + a^2} : \frac{a^5 - a}{a^5 + a}$$

$$4) \frac{9x^2 - x^6}{x^5 + x^7} : \frac{x^4 - 3x^2}{x^9 + x^7}$$

$$6.78. \quad 1) \frac{a^2 + ax + ab + bx}{a^2 - ax - ab + bx} \cdot \frac{a^2 - ax - bx + ab}{a^2 + ax - bx - ab}$$

$$2) \frac{x^2 + ax - 3x - 3a}{x^2 - ax - 3x + 3a} \cdot \frac{x^2 + 4x - ax - 4a}{x^2 + 4x + ax + 4a}$$

$$3) \frac{x^2 - bx + ax - ab}{x^2 + bx - ax - ab} : \frac{x^2 + bx + ax + ab}{x^2 - bx - ax + ab}$$

$$4) \frac{m^2 + m - mn - n}{m^2 + m + mn + n} : \frac{m^2 - m - mn + n}{m^2 - m + mn - n}$$

$$6.79. \quad 1) \left(a + \frac{a-b}{a+b} - b \right) : \left(\frac{2a+1}{a^2-b^2} + 1 \right) \quad 2) \left(x - \frac{x+y}{x-y} + y \right) : \left(1 - \frac{2y+1}{x^2-y^2} \right)$$

$$3) \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{x^4}{x^4-1} \quad 4) \left(\left(\frac{1-a}{a} : \frac{a}{1+a} \right) : \frac{a^2}{1+a^2} \right) : \frac{a^4-1}{a^4}$$

6.80. Егер, $x \neq y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ болса, онда $\frac{2}{xy} : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 - \frac{x^2 + y^2}{(x-y)^2}$ өрнегінің мәні айнымалыларға тәуелсіз болатынын көрсетіңдер.

6.81. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$1) \left(a - \frac{a^2 + x^2}{a+x} \right) \left(\frac{2a}{x} + \frac{4a}{a-x} \right) = 2a$$

$$2) \frac{am^2 - an^2}{m^2 + 2mn + n^2} : \frac{am^2 - 2amn + an^2}{3m + 3n} = \frac{3}{m-n}$$

C

6.82–6.85-есептердегі өрнектерді ықшамдаңдар.

$$6.82. \quad 1) \frac{3a^2 + 3ab + 3b^2}{4a + 4b} \cdot \frac{2a^2 - 2b^2}{9a^3 - 9b^3} \quad 2) \frac{5x^2 - 10xy + 5y^2}{2x^2 - 2xy + 2y^2} : \frac{8x - 8y}{10x^3 + 10y^3}$$

$$3) \frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 + 7a + 12} \cdot \frac{a^2 + 3a}{a^2 - 4a + 4} \quad 4) \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x - 10} : \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 9x + 14}$$

$$6.83. \quad 1) \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} \quad 2) \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} \quad 3) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^2}} \quad 4) \frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}}$$

$$6.84. \quad 1) \frac{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a}}{\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a}} \quad 2) \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}} \quad 3) \frac{x - \frac{ay}{y-a}}{y - \frac{ax}{x-a}}$$

$$6.85. \quad 1) \frac{a^2 - 1}{n^2 + an} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{a - an^3 - n^4 + n}{1 - a^2}$$

$$2) \frac{2a^2(a+c)^{2n} - 0,5}{an^2 - a^3 - 2a^2 - a} : \frac{2a(a+c)^n - 1}{a^2c - a(nc - c)}$$

6.86. Өрнектердің мәнін табыңдар.

$$1) \frac{ax}{a+x} - \frac{bx}{b-x}, \text{ мұндағы } x = \frac{ab}{a-b}$$

$$2) \frac{x^2y^2}{x^2-y^2}, \text{ мұндағы } x = \frac{2ab}{a^2-b^2}; y = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

6.87. Егер $a + \frac{1}{a}$ бүтін сан болса, онда $a^2 + \frac{1}{a^2}$ және $a^3 + \frac{1}{a^3}$ де бүтін сандар болатынын көрсетіңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.88. $x^8 - 16$ көпмүшесін 2-дәрежелі көпмүшелердің көбейтіндісіне жіктендер.

6.89. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) 2x - \frac{x-2}{2} = \frac{x}{3} - 6 \quad 2) 0,69 = \frac{5-2y}{8} \cdot 1,38$$

$$3) \frac{1-y}{7} + y = \frac{y}{2} + 3 \quad 4) 0,5 \cdot \frac{4+2x}{13} = x - 10$$

- 6.90. Бір координаталық жазықтықта $y=x^2$ және $y=x+2$ функцияларының графигін салып, олардың қиылысу нүктелерін график бойынша анықтаңдар.
- 6.91*. 6.90-есепте берілген функциялар графигінің қиылысу нүктелерінің координаталарын көбейткіштерге жіктеу тәсілімен анықтаңдар.
- 6.92. Ауылдан теміржол бекетіне дейін велосипедші 15 км/сағ жылдамдықпен, қайтар жолды 10 км/сағ жылдамдықпен жүрді. Егер велосипедші қайтар жолға барар жолмен салыстырғанда 1 сағ уақытты артық жұмсаса, онда ауыл мен теміржол бекетінің арақашықтығы қандай?

6.3.3. Рационал өрнектерді теңбе-тең түрлендіру

Рационал өрнектерді теңбе-тең түрлендіру бөлшектерді қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдары арқылы да орындалады. Осы амалдарды қолдану нәтижесінде алымы да, бөлімі де көпмүшелер болатын бөлшек аламыз.

Егер бірнеше түрлендірулер енгізу қажет болса, онда алдын ала қандай амалды орындау керектігін анықтап алған жөн.

1-мысал. $x+1 - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}$ өрнегін бөлшек түріне келтірейік.

Шешуі. Бірінші көбейту амалын, содан соң азайтуды орындау қажет:

$$1) \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x};$$

$$2) x+1 - \frac{x-2}{x} = \frac{x(x+1)-(x-2)}{x} = \frac{x^2+x-x+2}{x} = \frac{x^2+2}{x}.$$

Сонымен, жауабы: $x+1 - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{x^2+2}{x}.$

2-мысал. $\left(\frac{a-b}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} \right) : ab$ өрнегін ықшамдайық.

Шешуі: 1) $\frac{a-b}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{ab(a-b)}{ab(a+b)} = \frac{a-b}{a+b};$

$$2) \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b-a-b)(a-b+a+b)}{a^2-b^2} =$$

$$= -\frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{4ab}{b^2-a^2};$$

$$3) \frac{4ab}{b^2-a^2} : ab = \frac{4ab}{(b^2-a^2)ab} = \frac{4}{b^2-a^2}. \text{ Жауабы: } \frac{4}{b^2-a^2}.$$

Жаттығулар

А

6.93–6.104-есептердегі амалдарды орындаңдар.

$$6.93. \quad 1) \left(\frac{a}{a+1} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2} \right) \quad 2) \left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1} \right) : \frac{4m}{10m-5}$$

$$3) \left(\frac{a}{x-a} - \frac{a}{x+a} \right) \cdot \frac{x^2 + 2ax + a^2}{2a^2} \quad 4) \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$$

$$6.94. \quad 1) \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \quad 2) \left(\frac{a}{m^2} + \frac{a^2}{m^3} \right) : \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m}{a} \right)$$

$$3) \frac{ab+b^2}{3} : \frac{b^3}{3a} + \frac{a+b}{b} \quad 4) \frac{x-y}{x} - \frac{5y}{x^2} \cdot \frac{x^2-xy}{5y}$$

$$6.95. \quad 1) \left(\frac{x}{x+1} + 1 \right) \cdot \frac{1+x}{2x-1} \quad 2) \frac{5y^2}{1-y^2} : \left(1 - \frac{1}{1-y} \right)$$

$$3) \left(\frac{4a}{2-a} - a \right) : \frac{a+2}{a-2} \quad 4) \frac{x-2}{x-3} \cdot \left(x + \frac{x}{2-x} \right)$$

$$6.96. \quad 1) \left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2} \right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}$$

$$2) \left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1} \right) : \frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$$

$$3) (x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 \right)$$

$$4) \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{a}{x} \right) \cdot \frac{x^3}{a^3-x^3}$$

$$6.97. \quad 1) \left(\frac{b}{a^2-ab} + \frac{a}{b^2-ab} \right) \cdot \frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2} \quad 2) \left(\frac{2a}{a+2} + \frac{2a}{6-3a} + \frac{8a}{a^2-4} \right) : \frac{a-4}{a-2}$$

$$3) \left(\frac{a^2+b^2}{a} + b \right) : \left(\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2} \right) \quad 4) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) : \frac{x^2+2xy+y^2}{2xy}$$

$$\begin{aligned}
 6.98. \quad & 1) \left(m+1 - \frac{1}{1-m} \right) : \left(m - \frac{m^2}{m-1} \right) \quad 2) \left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2} - \frac{b}{2a-3b} \right) : \left(1 - \frac{2a-3b}{2a+3b} \right) \\
 & 3) \frac{b-c}{a+b} - \frac{ab-b^2}{a^2-ac} \cdot \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2} \quad 4) \frac{a^2-4}{x^2-9} : \frac{a^2-2a}{xy+3y} + \frac{2-y}{x-3}
 \end{aligned}$$

В

$$\begin{aligned}
 6.99. \quad & 1) \frac{4xy}{y^2-x^2} : \left(\frac{1}{y^2-x^2} + \frac{1}{x^2+2xy+y^2} \right) \\
 & 2) \left(\frac{x-2y}{x^2-2xy} - \frac{1}{x^2-4y^2} : \frac{x+2y}{(2y-x)^2} \right) \cdot \frac{(x+2y)^2}{4y^2} \\
 6.100. \quad & 1) \left(\frac{a^2}{a+n} - \frac{a^3}{a^2+n^2+2an} \right) : \left(\frac{a}{a+n} - \frac{a^2}{a^2-n^2} \right) \\
 & 2) \left(\frac{2x^2+x}{x^3-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) \cdot \left(1 + \frac{x+1}{x} - \frac{x+5}{x+1} \right) \\
 6.101. \quad & 1) \left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2} \right) : \left(\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a} \right) \\
 & 2) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} + \frac{3}{x^2-x+1} \right) \cdot \left(x - \frac{2x-1}{x+1} \right) \\
 6.102. \quad & 1) \frac{x+2}{x^2-2x+1} \cdot \frac{3(x-1)}{x^2-4} - \frac{3}{x-2} \\
 & 2) \left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a+a^2}{a^3-1} - \frac{1}{a-1} \right) : \frac{a^2+1}{1-a} \\
 6.103. \quad & 1) \frac{a-2}{4a^2+16a+16} : \left(\frac{a}{2a-4} - \frac{a^2+4}{2a^2-8} - \frac{2}{a^2+2a} \right) \\
 & 2) \left(\frac{a-x}{a^2+ax+x^2} - \frac{1}{a-x} \right) \cdot \left(\frac{2x+a}{a} + \frac{2a+x}{x} \right) \\
 6.104. \quad & 1) \frac{x^2-x}{x^2+ax+a^2} : \frac{x^2-1}{x^3-a^3} + \frac{x^3+a^3}{x^2-1} : \frac{x^2-ax+a^2}{ax-a}
 \end{aligned}$$

$$2) \left(\frac{k+x}{x^2-kx+k^2} - \frac{1}{k+x} \right) : \left(\frac{k^2+2x^2}{k^3+x^3} - \frac{k+2x}{k^2-kx+x^2} \right)$$

6.105. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$1) \frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} = \frac{b}{a-b} - \frac{b^2-ab}{a^2-b^2}$$

$$2) \frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{b}{a^2+ab} \right) = \frac{ab}{a^2-b^2}$$

6.106. $\frac{y}{3-y} + \frac{y^2+3y}{2y+3} \left(\frac{y+3}{y^2-3y} - \frac{y}{y^2-9} \right)$ өрнегінің мәні y айнымалысына тәуелсіз болатынын көрсетіндер.

С

6.107. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \right) (a+b+x)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{x^2}{a^2b^2}} \quad 2) \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}}$$

6.108. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{a+b}{ax+by} + \frac{a-b}{ax-by} + \frac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x^2+b^2y^2} - \frac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$$

$$2) \left(\frac{a^2+b^2}{ab} - 2 \right) : \left(\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right)$$

6.109. Теңбе-теңдіктерді дәлелдеңдер.

$$1) \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

$$2) \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

6.110. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{x-a}{x-b}, \text{ мұндағы } x = \frac{ab}{a+b} \quad 2) \frac{\frac{a}{b} - x}{\frac{b}{a} + x}, \text{ мұндағы } x = \frac{a-b}{a+b}$$

6.111. Ықшамдаңдар.

$$1) \frac{x - \frac{yz}{y-z}}{y - \frac{xz}{x-z}} \quad 2) \frac{\frac{a-b}{c-b} - \frac{b+c}{a+b}}{\frac{c-b}{a+b} + \frac{b-c}{a+b}}$$

6.112. Теңбе-теңдікті дәлелдендер.

$$\frac{\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{2}{a^2-b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right) (a^2-b^2)^2}{(a+b)^2 + 2(a^2-b^2) + (a-b)^2} = 1$$

Қайталауға арналған жаттығулар

6.113. Өрнектерді көпмүше түрінде жазыңдар.

$$1) (3x^2 - 4y)^3 \quad 2) (2a + b^2)^3 \quad 3) (4m^3 - n^2)^2$$

6.114. Теңдеулерді шешіңдер.

$$1) (2x+1)^2 - (2x-1)^2 = 7x+1,5 \quad 2) 9x(3+x) - (3x+4)^2 = 2x-14$$

6.115. Графигі: 1) $A(4;0,5)$; 2) $B(-0,5;2)$ нүктелері арқылы өтетін кері пропорционалдықты табыңдар. Табылған функция графигін салыңдар.

«Рационал өрнектер» бөлімі бойынша тест тапсырмалары

1. x -тің қандай мәнінде $\frac{5}{x-2}$ өрнегінің мәні болмайтынын анықтаңдар.

- A) $x = 0$ C) $x = 5$
B) $x = 2$ D) Өрнектің мәні әрқашан анықталады.

2. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{x^2}{x}$, мұндағы $x \neq 0$.

- A) x B) x^2 C) 1 D) 0

3. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{3x}{6x}$, мұндағы $x \neq 0$.

- A) $\frac{3}{6}$ B) $\frac{x}{2x}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{x}{2}$

4. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{2x+6}{2}$.

- A) $\frac{2(x+3)}{2} = x+3$ C) $\frac{2(x+3)}{2} = 2(x+3)$
B) $\frac{2(x+3)}{2} = x+6$ D) Ықшамдауға келмейді.

5. Ықшамдаңдар: $\frac{(x+3)(x-3)}{(3-x)(x+3)}$, мұндағы $x \neq -3$, $x \neq 3$.
A) -1 B) 1 C) $x - 3$ D) $3 - x$
6. Көбейтіндінің мәнін табыңдар: $\frac{3a-6}{b} \cdot \frac{4b}{3a}$, мұндағы $a, b \neq 0$.
A) $\frac{3(a-2) \cdot 4b}{2b \cdot 3a} = \frac{12b(a-2)}{6ab}$ C) $\frac{4b}{6ab} = \frac{2}{3a}$
B) $\frac{12(a-2)b}{6ab} = \frac{2(a-2)}{a}$ D) $\frac{4(a-2)}{a}$
7. Өрнектерді қосыңдар: $\frac{x-1}{2x}$ және $\frac{2x-1}{2x}$, мұндағы $x \neq 0$.
A) $\frac{x-1+2x-1}{2x} = \frac{3x-2}{2x}$ C) $\frac{x+2x-1}{2x} = \frac{3x-1}{2x}$
B) $\frac{3x-2}{4x}$ D) $\frac{2(3x-2)}{2x}$
8. Ықшамдаңдар: $\frac{(2x-4)^2}{(x-2)^2}$, мұндағы $x \neq 2$.
A) $\frac{2(x-2)^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{2(x-2)}{x-2}\right)^2 = 4$ C) $\frac{2(x-2)}{x-2}$
B) $\frac{4(x-2)^2}{(x-2)^2} = 4(x-2)$ D) $(2x-4) : (x-2) = 2$
9. Өрнекті түрлендіріңдер: $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$, мұндағы $x \neq 1$.
A) $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$ C) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$
B) $\frac{x^2-1}{(x-1)^2} = x+1$ D) $\frac{x-1}{x+1}$

VII. 7-СЫНЫП МАТЕРИАЛЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

7.1–7.5-есептердегі көрсетілген амалдарды орындаңдар.

7.1. 1) $\frac{2x}{15} - \frac{3x}{20} + \frac{x}{12}$ 2) $\frac{4a}{25} - \frac{4a}{35} + \frac{8a}{21}$ 3) $\frac{m}{a-1} + \frac{n}{1-a}$

7.2. 1) $3x \cdot \frac{y}{12x}$ 2) $\frac{3ab}{4xy} \cdot \frac{10x^2y}{21a^2b}$

3) $5x : \frac{15x}{y}$ 4) $\frac{12ab}{25c} : 8a^2$

7.3. 1) $(m+n)(m-n)$ 2) $(x+5)(x-5)$
3) $(a-3)(3+a)$ 4) $(y+2)(2-y)$

7.4. 1) $(x+2)^2$ 2) $(3x-y)^2$ 3) $(5a+b)^2$ 4) $(a^2+b^2)^2$

7.5. 1) $(x+1)^2(x^2-x+1)$ 2) $(a-2)(a^2+2a+4)$

3) $\left(\frac{m}{2} - 2n\right)\left(\frac{m^2}{4} + mn + 4n^2\right)$

7.6. Есептеңдер: 1) $(3ab)^3$, мұндағы $a = \frac{1}{2}$, $b=4$.

2) $-\left(\frac{1}{5}xyz\right)^2$, мұндағы $x=-2$, $y=-5$, $z = 1\frac{3}{4}$.

7.7. Бөлшектерді қысқартыңдар.

1) $\frac{15x}{20y}$ 2) $\frac{6xy}{8y^2}$ 3) $\frac{2m^2}{3mn}$ 4) $\frac{24a^3}{56a^2b}$

7.8. Теңдеулерді шешіңдер.

1) $8x-3=5x+6$ 2) $x-7+8x=9x-3-4x$

7.9. Бөлуді орындаңдар.

1) $(x^2-9):(x+3)$ 2) $(a-b)^2:(a^2-b^2)$ 3) $(25-x^2):(x+5)$

7.10. Ықшамдаңдар.

1) $-\left(\frac{1}{3}xy^3\right)^2 \cdot (-3x)^3$ 2) $(-5x^3y)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}ab^3\right)^3$ 3) $(-2a^3b)^3 \cdot (-2b)$

В

7.11–7.17-есептерде көрсетілген амалдарды орындаңдар.

7.11. 1) $\frac{a}{xy} + \frac{a}{xu}$ 2) $\frac{m}{ab} - \frac{n}{ac}$ 3) $\frac{5x^2 - y^2}{xy} - \frac{3x - 2y}{y}$

7.12. 1) $\frac{5x}{ab} + \frac{2y}{3a^2b} - \frac{3}{6a^2b^2}$ 2) $\frac{2a - 3b}{a^2b} - \frac{4a - 5b}{ab^2}$

3) $\frac{5a^2 - 2a - 1}{a^2b} - \frac{3a - 2}{ab}$

7.13. 1) $\left(\frac{b^2xy}{9a^5} : \frac{7xy}{12a^5}\right) \cdot \frac{28a^4}{3b^2}$ 2) $\frac{3mx^2y}{2a^2b^2} \cdot \frac{3abc}{8p^2q^2} : \frac{9a^2b^2c^3}{28xpq}$

7.14. 1) $(1+x)(1-x)(1+x^2)$ 2) $5x^2 - 3(x+1)(x-1)$

7.15. 1) $(x^3+8) : (x^2-2x+4)$ 2) $(a^3+27b^3) : (a+3b)$

7.16. 1) $[x(x+2y)+y^2] \cdot [x^2-y(2x-y)] : (x-y)(x+y)$

2) $(8a^3-0,027):(2a-0,3)-(a+1)^2$

7.17. 1) $x^m : x^n$ 2) $-y^{2m} : y^m$ 3) $a^{2n+2} \cdot a^{2-n}$ 4) $b^{2n+1} \cdot b^{1-2n}$

7.18. Тиімді төсілмен есептеңдер.

1) $2,4 \cdot 1,6$ 2) $49 \cdot 51$ 3) $86^2 - 14^2$ 4) $\left(3\frac{4}{5}\right)^2 - \left(2\frac{1}{5}\right)^2$

7.19. Бір фунт 0,41 кг. 1) x фунтты y килограмға айналдыру формуласын жазыңдар. 2) Фунтты килограмға айналдыру графигін салыңдар.

7.20. Ықшамдаңдар.

1) $\left(\frac{m}{m+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3m^2}{1-m^2}\right)$ 2) $\left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}\right) \cdot \frac{10x-5}{4x}$

7.21. Ықшамдаңдар.

1) $\frac{y - \frac{1}{y}}{\frac{1}{y} + 1}$ 2) $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$

7.22. $(xyz)^2 = x^2y^2z^2$ теңдігін дәлелдеңдер. Бұл теңдік қандай ережеге сай келеді?

7.23. Қай санның үлкен болатынын түсіндіріңдер: 1) a^2 немесе $\frac{1}{a^2}$, егер $a > 1$ және $0 < a < 1$; 2) a^2 немесе a^3 , егер $a > 1$ және $a < 1$ болса.

7.24. Бөлшектерді қысқартыңдар.

$$1) \frac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)} \quad 2) \frac{10x^2y(a-b)^2}{25x^4y(a-b)^3} \quad 3) \frac{7m^3n^5(p+q)}{21m^2n^3(p+q)^2}$$

7.25. Бөлшектерді қысқартыңдар.

$$1) \frac{8x^2y^2(a-5)}{12xy^4(5-a)} \quad 2) \frac{3x^2+4xy}{9x^2y-16y^3} \quad 3) \frac{2ac-4bc}{5a^3c-20acb^2}$$

7.26. Есептеңдер.

$$1) \frac{a^2x - ax^2}{a - x}, \text{ мұндағы } a=1,5; x=0,75$$

$$2) \frac{a^2 - 8a + 16}{ax - 4x}, \text{ мұндағы } a=-5; x=-2$$

7.27. Есептеңдер.

$$1) \frac{5^4 + 5 \cdot 3^6}{5^3 + 5^2 \cdot 3^2} \quad 2) \frac{6^6 \cdot 2^3 - 3^6}{6^6 + 3^3 \cdot 6^3 + 3^6} \quad 3) \frac{(-27)^{-15} \cdot (-9)^{20}}{(-3)^{-7}}$$

7.28. Өрбір натурал n үшін $\frac{9^{2n} + 14}{5}$ бөлшегінің мәні натурал сан болатынын дәлелдеңдер.

7.29. 100^{20} және 9999^{10} сандарын салыстырыңдар.

7.30. Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$1) \frac{28^{n+1}}{2^{2n+1} \cdot 7^n} \quad 2) \frac{90^{n+1}}{2^n \cdot 3^{2n} \cdot 5^n}$$

7.31. Функциялардың графигін салыңдар.

$$1) y = -\frac{1}{2}x^2 \quad 2) y = \frac{x^3}{3} \quad 3) y = -\frac{4}{x}$$

7.32. Толық квадратты 3-ке және 4-ке бөлгенде қандай қалдықтар қалуы мүмкін?

С

7.33. Есептеңдер.

1) $\frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c}$, мұндағы $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$

2) $\frac{x^3 + x^2y}{x^2 + 2xy + y^2}$, мұндағы $x=3$, $y=-2$

7.34. Бөлшектерді қысқартыңдар.

1) $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}$

2) $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}$

3) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$

7.35. Амалдарды орындандар.

1) $\frac{2c-1}{2c} - \frac{2c}{2c-1} - \frac{1}{2c-4c^2}$

2) $\frac{3}{x^2+2xy+y^2} - \frac{4}{x^2-2xy+y^2} + \frac{5}{x^2-y^2}$

7.36. Амалдарды орындандар.

1) $\frac{m^2-5m+6}{m^2+7m+12} \cdot \frac{m^2+3m}{m^2-4m+4}$

2) $\frac{a^2+2a-3}{a^2+3a-10} : \frac{a^2+7a+12}{a^2-9a+14}$

7.37. Ықшамдандар.

1) $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

2) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{y}}}$

3) $\frac{1}{a - \frac{1}{a - \frac{a}{1-a}}}$

7.38. Бір сан ойлап, оны 3-ке көбейтіңдер, көбейтіндінің мәніне 36-ны қосыңдар, шыққан санды 3-ке бөліп, нәтижесінен ойлаған санды азайтыңдар. Нәтижесінде 12-ге тең сан шығады. Қандай сан ойласақта, нәтижесінде неліктен 12-ге тең сан шығатынын түсіндіріңдер.

7.39. $333^{555} + 555^{333}$ қосындысы 37-ге бөлінетінін көрсетіңдер.

7.40. Көбейтіндіні дәреже түріне келтіріңдер.

1) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{31}$ 2) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot \dots \cdot 5^{33}$ 3) $7^2 \cdot 7^6 \cdot \dots \cdot 7^{2n}$

7.41. Өрнектердің мәнін табыңдар.

1) $\frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}, n \in N$ 2) $\frac{(4^{n+1} + 6 \cdot 4^n)^3}{(8^{n+1} + 2 \cdot 8^n)^2}, n \in N$

7.42. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 20$ санын жай көбейткіштердің көбейтіндісі түрінде жазыңдар (қарапайым жіктелуі түрінде).

7.43. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100$ саны берілген. Оны қысқаша $100!$ түрінде жазып, «жүз факториал» деп оқиды. 1) Бұл сан неше нөлмен аяқталады?

2) $100!$ саны 2-нің ең үлкен қандай дәрежесіне бөлінеді?

7.44. Кез келген бүтін сан және оның 5-дәрежесі бірдей цифрлармен аяқталатынын көрсетіңдер.

7.45. Қайсысы үлкен: 1) 5^{300} не 3^{500} ; 2) 2^{700} не 5^{300} ; 3) 2^{300} не 3^{200} ?

7.46. $2^{2002} \cdot 5^{2003}$ санын стандарт түрде жазыңдар.

7.47. Санның ең соңғы цифрын анықтаңдар: 1) 9^{2003} ; 2) 3^{2003} ; 3) 2^{2003} .

7.48. $9119^{191^{119}}$ саны қандай цифрмен аяқталады?

7.49. $1999^{2003} + 9991^{2002}$ қосындысы қандай цифрмен аяқталады?

7.50. $43^{43} - 17^{17}$ айырмасы қандай цифрмен аяқталады?

7.51. 12 таңбалы k санының ондық жүйедегі жазылуында 2 және 9 цифрлары екі реттен, ал қалған цифрлар бір-бірден кездеседі. k саны толық квадрат болуы мүмкін бе?

7.52. Санның ондық жүйедегі жазылуында 300 бірлік және бірнеше нөл ғана бар (өзге цифрлар жоқ). Осы сан толық квадрат болуы мүмкін бе?

ТЕРМИНДЕР АТАУЫНЫҢ СӨЗДІГІ

1-бөлім. Натурал және бүтін көрсеткішті дәреже

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Натурал көрсеткішті дәреже	Степень с натуральным показателем	Power with natural exponent
Дәреженің негізі	Основание степени	Basis of power
Дәреже көрсеткіші	Показатель степени	Exponent
Көрсеткіші нөлге тең дәреже	Степень с натуральным показателем	Power with natural exponent
Бүтін көрсеткішті дәреже	Степень с целым показателем	Power with integer exponent
Сандар тізбегі	Последовательность чисел	Sequence of numbers
Тізбектің жалпы мүшесі	Общий член последовательности	General term
Санның стандарт түрі	Стандартный вид числа	Standard form of number
Санның реті	Порядок числа	Order of number
Санның мәнді цифры	Значащая цифра числа	Significant digit of number
Абсолюттік қателік	Абсолютная погрешность	Absolute error
Салыстырмалы қателік	Относительная погрешность	Relative error

2-бөлім. Бірмүшелер мен көпмүшелер

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Бірмүше	Одночлен	Monomial
Бірмүшенің стандарт түрі	Стандартный вид одночлена	Standard form of monomial
Бірмүше коэффициенті	Коэффициент одночлена	Coefficient of monomial
Бірмүшенің дәрежесі	Степень одночлена	Degree of monomial
Көпмүше	Многочлен	Polynomial
Көпмүшенің дәрежесі	Степень многочлена	Degree of polynomial
Ұқсас мүшелер	Подобные члены	Similar terms
Ортақ көбейткіш	Общий множитель	Common factor

3-бөлім. Функция

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Функционалды тәуелділік	Функциональная зависимость	Functional dependence
Аргумент	Аргумент	Argument
Анықталу облысы	Область определения	Domain
Мәндер облысы	Область значений	Range
Сызықтық функция	Линейная функция	Linear function
Тура пропорционалдық	Прямая пропорциональность	Direct proportionality
Бұрыштық коэффициент	Угловой коэффициент	Slope coefficient
Парабола	Парабола	Parabola
Кубтық парабола	Кубическая парабола	Cubic parabola
Кері пропорционалдық	Обратная пропорциональность	Inverse proportionality
Кері пропорционалдық коэффициенті	Коэффициент обратной пропорциональности	Inverse proportionality coefficient

4-бөлім. Статистика элементтері

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Бас жиынтық	Генеральная совокупность	General population
Кездейсоқ таңдама	Случайная выборка	Random sample
Таңдама көлемі	Объем выборки	Sample size
Таңдама құлашы	Размах выборки	Sample range
Ығыспалы қатар	Вариационный ряд	Variation series
Нұсқалық	Варианта	Variant
Абсолюттік жиілік	Абсолютная частота	Absolute frequency
Салыстырмалы жиілік	Относительная частота	Relative frequency
Ығыспалы қатардың абсолюттік (салыстырмалы) жиіліктер кестесі	Таблица абсолютных (относительных) частот вариационного ряда	Table of absolute (relative) frequencies of the variation series
Абсолюттік (салыстырмалы) жиіліктер алқабы	Полигон абсолютных (относительных) частот	Polygon of absolute (relative) frequencies

5-бөлім. Қысқаша көбейту формуласы

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Қысқаша көбейту формулалары	Формулы сокращенного умножения	Short multiplication formulas
Екі өрнектің қосындысының (айырмасының) квадраты	Квадрат суммы (разности) двух выражений	The square of the sum (difference) of two expressions
Екі өрнектің квадраттарының айырмасы	Разность квадратов двух выражений	Difference of the Squares of Two Expressions
Екі өрнектің қосындысының (айырмасының) кубы	Куб суммы (разности) двух выражений	Cube of the Sum (Difference) of Two Expressions
Екі өрнектің кубтарының қосындысы (айырмасы)	Сумма (разность) кубов двух выражений	Sum (Difference) of the Cubes of Two Expressions
Екі өрнектің қосындысының (айырмасының) толымсыз квадраты	Неполный квадрат суммы (разности) двух выражений	Incomplete Square of the Sum (Difference) of Two Expressions
Бүтін өрнек	Целое выражение	Integer Expression
Математикалық модель	Математическая модель	Mathematical Model

6-бөлім. Рационал өрнектер

Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
Бүтін өрнек	Целое выражение	Integer expression
Бөлшек өрнек	Дробное выражение	Fractional expression
Рационал өрнек	Рациональное выражение	Rational expression
Мүмкін мәндер	Допустимые значения	Permissible values
Мүмкін мәндер жиыны (ММЖ)	Область допустимых значений (ОДЗ)	Permissible value range (PVR)

ГЛОССАРИЙ

1-бөлім. Натурал және бүтін көрсеткішті дәреже

Атауы	Мазмұны
Натурал көрсеткішті дәреже	Егер a кез келген сан, ал n бірден үлкен натурал сан болса, онда $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ көбейтіндісі a санының n-ші дәрежесі деп аталады да, ол a^n түрінде жазылады. Мұнда a саны дәреженің негізі, ал n натурал саны дәреже көрсеткіші
Көсеткіші нөлге тең дәреже	Нөлге тең емес a санының көрсеткіші нөлге тең дәрежесі анықтама бойынша бірге тең. 0^0 өрнегінің мағынасы жоқ
Бүтін теріс көрсеткішті дәреже	n натурал сан болса, онда нөлге тең емес a санының $(-n)$ -ші дәрежесі деп a санының n -ші дәрежесіне кері санды айтады: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Сандар тізбегі	Қайсыбір заңдылықпен шексіз жалғасып жазылатын сандар жиыны
Тізбектің жалпы мүшесі	Тізбектің n -ші мүшесінің формуласы
Санның стандарт түрі	Санның стандарт түрі былай жазылады: $a \cdot 10^n, (1 \leq a < 10),$ n – бүтін сан – санның реті, ал a – оның мәнді бөлігі
Абсолюттік қателік	Дәл мән мен жуық мән айырмасының абсолют шамасы
Салыстырмалы қателік	Абсолюттік қателіктің жуық мән модуліне қатынасы

2-бөлім. Бірмүшелер мен көпмүшелер

Атауы	Мазмұны
Бірмүше	Сандардан, айнымалылардан және олардың дәрежелерінен көбейту амалы көмегімен құрылған өрнек
Бірмүшенің стандарт түрі	Бірмүшенің, бірінші орында сан көбейткіш, ал оған жалғастыра айнымалылар мен олардың дәрежелері жазылған түрі

Бірмүше коэффициенті	Бірмүшенің сан көбейткіші
Бірмүшенің дәрежесі	Бірмүше құрамындағы айнымалылардың дәреже көрсеткіштерінің қосындысы
Көпмүше	Бірмүшелердің қосындысы
Көпмүшенің дәрежесі	Құрамындағы бірмүше дәрежелерінің ең үлкені
Ұқсас мүшелер	Бірдей немесе коэффициенттері ғана өзгеше бірмүшелер
Ортақ көбейткіш	Бірмүшелер құрамында кездесетін ортақ өрнектер

3-бөлім. Функция

Атауы	Мазмұны
Функционалды тәуелділік	Тәуелсіз айнымалының әрбір мүмкін мәніне тәуелді айнымалының бір ғана мәні сәйкес келетін тәуелділік
Аргумент	Тәуелсіз айнымалы
Анықталу облысы	Аргументтің мүмкін мәндері жиыны
Мәндер облысы	Функцияның барлық қабылдайтын мәндері жиыны
Сызықтық функция	$y = kx + b$ түріндегі функция, мұнда k – бұрыштық коэффициент, b – бос мүше $y = kx$ түріндегі тура пропорционалдық функциясы ($y = kx + b$ түріндегі сызықтық функцияның дербес жағдайы), мұнда k – пропорционалдық коэффициент
Парабола	$y = x^2$ функциясының графигі
Кубтық парабола	$y = x^3$ функциясының графигі
Кері пропорционалдық функция	$y = \frac{k}{x}$ түріндегі функция, мұнда k – пропорционалдық коэффициент

4-бөлім. Статистика элементтері

Атауы	Мазмұны
Бас жиынтық	Статистикалық зерттеулер жүргізуге болатындай санды белгілері бар біртекті объектілер жиынтығы

Кездейсоқ таңдама	Бас жиынтықтың кездейсоқ таңдап алынған бөлігі
Таңдама көлемі	Таңдама құрамына енген мөндер саны
Таңдама құлашы	Таңдама құрамына енетін ең үлкен және ең кіші мөндер айырмасы
Ығыспалы қатар	Таңдама құрамына енетін мәліметтердің әр түрін өсу тәртібімен жазғанда шығатын тізбек
Нұсқалық	Ығыспалы қатарда кездесетін әрбір мән
Абсолюттік жиілік	Таңдама құрамында нұсқалықтың неше рет кездесетінін білдіретін сан
Салыстырмалы жиілік	Нұсқалықтың абсолюттік жиілігін таңдама көлеміне бөлгенде шығатын сан
Ығыспалы қатардың абсолюттік (салыстырмалы) жиіліктер кестесі	Бірінші жолға ығыспалы қатар нұсқалықтары, ал екінші жолға нұсқалықтың абсолюттік жиілігі (салыстырмалы жиілігі) жазылатын кесте
Абсолюттік (салыстырмалы) жиіліктер алқабы	Ығыспалы қатардың бірінші жолындағы нұсқалықтарды абсцисса өсіне, ал екінші жолдағы сәйкес жиіліктерді (салыстырмалы жиіліктерді) ордината өсіне өлшеп салғаннан шығатын нүктелерді белгілеп, оларды кесінділермен тізбектеп қосқанда шығатын фигура

5-бөлім. Қысқаша көбейту формулалары

Атауы	Мазмұны
Қысқаша көбейту формулалары	Көпмүшені көпмүшеге көбейтуді ықшамды орындау формулалары
Екі өрнектің қосындысының (айырмасының) квадраты	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Екі өрнектің квадраттарының айырмасы	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Екі өрнектің қосындысының (айырмасының) кубы	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Екі өрнектің кубтарының қосындысы (айырмасы)	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
Екі өрнектің қосындысының (айырмасының) толымсыз квадраты	$a^2 \pm ab + b^2$
Бүтін өрнек	Қосу, азайту, көбейту, бөлу және дәрежеге шығару амалдары көмегімен сандар мен айнымалылардан құралған өрнек
Математикалық модель	Мәтінді есептерді шешу барысында құрылатын теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері

6-бөлім. Рационал өрнектер

Атауы	Мазмұны
Бөлшек өрнек	Бөлімінде айнымалысы бар өрнектер
Рационал өрнек	Бүтін өрнектер мен бөлшек өрнектер
Мүмкін мәндер жиыны (ММЖ)	Өрнектің мағынасы бар болатындай оның құрамындағы айнымалылардың барлық мәндері жиыны

**7-СЫНЫП МАТЕРИАЛЫНДАҒЫ КЕЙБІР ЕСЕПТЕРДІҢ
ШЫҒАРЫЛУЫ МЕН ЖАУАПТАРЫ**



1.44. 1)-есеп



1.81-есеп



1.98. 4)-есеп



1.139. 4)-есеп



2.11. 3)-есеп



2.22-есеп



2.73-есеп



3.32-есеп



3.76-есеп



3.77-есеп



3.129-есеп



5.30-есеп



5.97. 1)-есеп



5.152-есеп



6.109-есеп

**ОҚУШЫЛАРДЫҢ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ САУАТТЫЛЫҒЫН
АРТТЫРУҒА АРНАЛҒАН ҚОСЫМША ТАПСЫРМАЛАР**



ҚОРЫТЫНДЫ ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫ



ЖАУАПТАРЫ

5–6-сынып материалын қайталау

1. 1) $-15,92$; 2) $61,5$; 3) $-3,441$; 4) $144,03$; 2. 1) -9 ; 2) -23 ; 3) -11 ; 4) $6,5$. 3. 1) -2 ; 2) -4 ; 3) 6 ; 4) 9 . 4. 1) 17 ; 2) кез келген сан шешімі болып табылады; 3) 2 ; 4) ± 2 . 5. 2) $-1\frac{5}{9}x - 1,85y$. 4) $-3,5x - 0,75y$. 6. 1) $x > 2$; 2) $x > 9$; 3) $x \leq 3$; 4) $x \geq 5$; 5) $x > -12$; 6) $y \geq 6$. 8. 1) (2; 7); 2) (3; 7); 3) (0; 3); 4) (-3; -4); 9. 5) (8; -2); 6) (4; -3). 10. 33 және 25. 11. 1) $\frac{7}{11}$; 2) $7\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 8. 12. 1) $-\frac{1}{4}$; 2) 2; 3) 13; 4) 1,5. 13. 1) 7; 2) 17; 3) 3; 4) шешімі жоқ. 14. 1) 2; 2) 3; 3) -6; 4) -5. 15. 1) -10; 2) 42; 3) 18; 4) 4. 16. 1) (4; 3); 2) (8; 7); 3) $(\frac{1}{3}; \frac{1}{4})$; 4) (4; 3). 17. 1) 0,235; 2) 1; 3) 10000. 18. 21 және 24. 19. 6 см, 24 см, 5 см. 20. 35 данадан барлығы 70 монета. 22. 1) $x=4a$; 2) $x=2a$; 3) $x=6,36$. 23. 1) $x = \frac{am+qb}{mp+lq}$; $y = \frac{pb-al}{mp+lq}$; 3) $x=-1$, $y=1$; 4) $x=4$; $y=-1$. 25. 1) $a \neq 2$; c -кез келген сан; 2) $a=2$; $c=14$; 3) $a=2$, $c \neq 14$. 26. 8 жұмысшы 10 күнде. 27. 10 жас, 52 жас. 28. 1) $x > 2$; 2) $x < 2$; 3) $x=2$. 29. $y \leq 2x+3$; $y \geq \frac{1}{3}x-2$; $y \leq -1\frac{1}{3}x+3$.

1. Натурал және бүтін көрсеткішті дәреже

1.8. 97. 1.9. 1) -9 ; 2) 80 ; 3) $18,6$; 4) 6 . 1.10. 3) $(-0,5)^3 < 0$; 5) $-(1,1)^4 < (0,3)^4$. 1.11. 3) $(x-y)^3$; 4) $(a+b)^n$. 1.13. 4) $\frac{3x^2}{2y^3}$. 1.14. 1) 883 ; 2) $0,75$; 3) 1 . 1.15. 1) $(x+y)^2$; 4) $2(x-y)^3$. 1.16. Мүмкін емес. 1.17. $a = -1 \Rightarrow -11$; $a = 0 \Rightarrow 0$; $a = 2 \Rightarrow -20$. 1.18. 1) $\frac{17}{54}$; 2) $3\frac{11}{13}$; 3) $-1\frac{151}{180}$; 4) $1\frac{1}{6}$. 1.21. 1) Орындалады; 2) әрқашан орындала бермейді. 1.22. 2) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{97}{120}$. 1.23*. 1) $a \neq -4$; 2) $a=-4$; $b=6$; 3) $a=-4$; $b \neq 6$. 1.24. 1) -22 ; 2) -16 . 1.25. 1) $a > 1$; $a < 1$; 3) a - бүтін тақ сан; 4) $a=1$. 1.28. 1) 2^{11} ; 2) $0,2^8$; 3) 3^8 ; 4) 6^{14} ; 5) $(\frac{1}{4})^{10}$; 6) $0,1^9$. 1.31. 1) 25 ; 5) $-\frac{3}{7}$; 6) $6\frac{19}{25}$. 1.36. 2) a^{10} ; 3) 4^8 ; 5) m^{16} ; 6) 7^{11} . 1.37. 4) $x^0 \cdot x^{12}$. 1.41. 1) 216 ; 2) 5 . 1.42. Мысалы, 4) $3^5 \cdot 3^7$. 1.43. 1) 25 ; 2) 9 ; 3) $0,64$; 4) $-3\frac{3}{8}$; 5) $\frac{8}{27}$. 1.44. 1) 17 ; 2) 16 ; 3) 25 ; 4) $0,027$. 1.48. 1) $2a$; 2) x^5 . 1.49. 3) 7^{n+3} ; 4) 3^{k+5} . 1.50. 1) 8 ; 2) 9 ; 3) 5 . 1.51. 3) $x=a^4$; 4) $x=a^{11}$. 1.55. 1) 49 ; 2) 100 ; 3) 1 . 1.57. 1) $-20p^2$;

2) $-5a^{n+18} \cdot b^{n+14}$. 1.60. (2,8; -0,4). 1.61. 15000 тг, 12000 тг және 12000 тг.
 1.66. 6) $-\frac{y^3}{x^5}$; 8) $-\frac{32a^3b^5}{243x^5}$. 1.67. 3) $(3c)^4$; 6) $(0,2p)^4$. 1.68. 4) a^{24} ; 5) a^{10} . 1.69. 2) b^8 ; 6) b^9 .
 1.70. 1) x^4 ; 4) x^9 . 1.71. 2) a^{20} ; 5) x^{15} . 1.72. 1) x^6 ; 2) ab^3 ; 3) $a^6 \cdot x^{10}$. 1.76. 2) x^{n+1} ; 4) x^{3n} .
 1.77. 4) 3^{10} . 1.78. 2) $(25^2)^5$; 5) $(5^5)^4$. 1.79. 1) 2; 2) 125; 3) 25; 4) $\frac{1}{9}$. 1.81. k^4 . 1.82. $\frac{p^6}{q^4}$.
 1.83. 1) 4 төсілмен; 2) 4 төсілмен. 1.85. Жоқ. 1.86. 1-мен. 1.88. 1) $A(3; -5)$, $B(3; 5)$;
 2) $A(-3; -5)$; $B(3; -5)$; 3) $A(-3; -5)$; $B(3; 5)$. 1.89. $k=1$, $b=2$. 1.90. 800 т. 1.91*. Жоқ.
 1.95. 8) $25^{-1} \cdot (x-y)^2 \cdot (x+y)^{-4}$. 1.96. 1) 7; 2) 8; 3) $\frac{1}{9}$; 4) 25; 5) 1; 6) 1000.
 1.97. 3) $2^6 \cdot m^6 \cdot n^{-6}$; 5) $9 \cdot p^6 \cdot q^{-2}$. 1.98. 1) 2^{-1} ; 2) 2^{-12} ; 3) 2^2 ; 4) 2^0 . 1.100. 1) -2; 2) 8; 3)
 5000; 4) 1001; 5) 2,25; 6) $\frac{1}{72}$. 1.102. 2) $\left(-\frac{1}{25}\right)^{-3} < 0$; 3) $(-5)^4 > 0$. 1.103. 1) $2^{-5} < 2^{-4}$;
 2) $7^{-5} < 7^{-3}$; 3) $(-3)^{-3} < 3^{-3}$; 4) $(0,2)^{-3} > (0,5)^{-3}$; 5) $(0,3)^{-3} < (0,3)^{-4}$; 6) $6^{-2} = (-6)^{-2}$.
 1.104. 1) 3^{n+2} ; 4) 3^n . 1.105. 1) $n=-2$; 2) $n=5$; 3) $n=-1$; 4) $n=-1$. 1.106. 3) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-10}$;
 4) $\left(\frac{1}{a^4}\right)^5$. 1.107. 2) $3y$. 1.108. 2) 10^{2n+4} . 1.109. 3) $x=1$. 1.110. 1) 5; 3) 15. 1.112. 1) 16;
 2) 64; 3) 1. 1.113. 3 км/сағ. 1.114. 6 үй жануары және 14 тауық. 1.115. $y=-3$.
 1.116. 4) $a_4=125$; $a_5=625$. 1.118. 3^{-3} ; 3^{-2} ; 3^{-1} ; 3^0 . 1.122. 2) $3 \cdot 4 \cdot 10^{-11} < 7,5 \cdot 10^{-9}$;
 3) $7,27 \cdot 10^{-5} < 5,1 \cdot 10^{-4}$. 1.124. 1) $a_6=8$. 1.128. 4) $a_5=16$, $a_6=-32$. 1.129. 3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$.
 1.130. 2) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{9}{8}$; $\frac{16}{16}$. 1.137. 1) $a_n = \frac{n^2}{3^n}$. 1.139. 4) $1-(-1)^n$. 1.144. 1) $5,01 \cdot 10^6$;
 2) $1,7 \cdot 10^{-3}$; 3) $20,93 \cdot 10^4$; 4) $4,47 \cdot 10^{-6}$. 1.145. 0,03; 0,032. 1.146. 1) 0,4; $\frac{0,4}{5} = 0,08$.
 1.147. 1) 0,21; 2) 2; 3) 0,023; 4) 0,0039. 1.149. 0,0076. 1.151. 0,0333; 0,0033;
 0,0003. 1.152. 0,048. 1.153. 0,0002. 1.154. 1) $134,15 \cdot 10^6$; 2) $142,47 \cdot 10^{-6}$.
 1.155. 1) 0,004; 3) 0,001. 1.156. 1) 0,003; 2) 0,0007; 3) 0,001; 4) 0,001.
 1.165. $\approx 0,056$. 1.167. 0,7%. 1.170. 1) 0,00001; 0,001%. 1.171. 1) $A_1(3; -4)$;
 2) $B_1(-5; 2)$. 1.172. 1) 16; 2) 12. 1.173. 37.

2. Бірмүшелер мен көпмүшелер

2.1. 1) -3700; 2) -21000; 6) 14,7. 2.2. 2) $20ab$; 5) $1,5mn$. 2.3. 3) $16m^6$; 6) $6\frac{1}{4}x^2y^4$.
 2.4. 4) $-6ab^2$; 8) $-10m^3n^3$. 2.5. 1) $-3,3a^4b^3$; 4) x^6y^4z . 2.6. 2) $-6a^6b^3$; 4) $-0,1x^4y^8$;
 5) $-0,1m^6n^4$; 8) $-p^{10}q^8$. 2.7. 3) $-m^{10}n^5k^{15}$; 4) $4a^2b^4$. 2.8. 2) $(13x^3)^2$; 3) $(0,2b^6)^2$.
 2.9. 1) $-8a^{12}b^6$; 3) $16x^4y^{12}$. 2.10. 1) $(0,1a^3b^2)^2$. 2.11. 6) $(-0,2b^2y^3)^3$. 2.12. $36m^3$.
 2.14. 1) $(\pm a^3b^6)^2$. 2.15. 1) $(x^3y^2)^3$; 2) $(0,2a^4b)^3$. 2.16. 1) $8x^{10}y^{10}$; 3) $-12m^7n^9$.

- 2.17. 2) $-72x^{5n}y^{5m}$; 4) $2a^3b^4 \cdot c$. 2.18. 1) 3^{14} ; 2) 2^{12} . 2.19. 1) $2xy$; $2x^2y^0$; $2x^0y^2$.
 2.20. 1) $x^{15} \cdot y^{11}$. 2.23. 1) 1; 2) $-\frac{1}{6}$. 2.24. 1) 3^{-s} ; 2) 5^a ; 3) 25. 2.25. $\underline{A}(1,3; 1,1)$.
 2.26. 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{1}{2}$. 2.27. 1) 0, 1, 4, 5, 6, 9; 2) 0, 1, 5, 6. 2.31. 3) $3\frac{1}{4} - \frac{1}{2}m$;
 6) $3p^2q - pq^2$. 2.32. 1) $a - 7$; 2) $b^2 + b - 14$. 2.33. 1) $4x^3 - 8x + 2$; 2) $2x^3 + 8$; 3) $-2x^3 - 8$.
 2.34. 1) $2x$; $2y$; 3) $-2a$, $2a^2 + 8$. 2.35. 2) $2x - 2$; 3) $-x^2 + 2x$. 2.36. 1) 32; 2) 11. 2.37.
 3) $6xy^2 - 0,2y^3 - 1$; 4) $m^2n^3 + m^4$. 2.38. 1) $-x^2 + 2x + 1$; 4) $b^2 - 4$. 2.40. 1) $x = 0,3$; 2) $y = -20$;
 3) $x = 0$; 4) 5. 2.41. 1) $4a$; 2) $5m$; 3) p ; 4) $2b$; 5) $-2c$; 6) n . 2.43. 1) $a - 4b + 9c - 6d$;
 2) $7a^2 - 3ax - 4x^2$. 2.44. 3) $1\frac{5}{12}m^3 + 15\frac{1}{6}m^2n + 2\frac{1}{4}mn^2 - 7\frac{2}{3}n^3$. 2.45. $3a + 4b$. 2.46. 1) 60;
 2) 156. 2.47. 1) $x^3 + 4 + (2x^3 - 2x^2 - x)$. 2.48. 1) $x + y + z = 5a^2 + ab$. 2.49. 1) $(a^3 + a^2) - (-a^2 +$
 $+ 3a + 5)$. 2.50. 1) $A = 2x^2 + 10xy - y^2$; 2) $A = 12a^s + 3b^m + 2c$; 3) $A = 3x^{n+1} + 10x^n - 7x - 5$.
 2.51. 5) $-4x^s + x^3 + x - 6$. 2.53. 1) 2; 2) -9 . 2.54. 1) $-2m$; 2) a ; 3) p ; 4) $\frac{4b - 2a}{3}$.
 2.55. 3) $-125a^4b$. 2.57. 1. 2.58. 5 дана. 2.62. 1) $-8x^3 + 20x^2 - 12x$; 8) $3m^3n +$
 $+ 1,5m^2n^2 - 2mn^3$. 2.63. 1) -1 ; 2) 3; 3) 16; 4) -5 . 2.64. 6) $3ab + b^2$. 2.66. 1) 8;
 2) -27 ; 3) 1,2; 4) $7\frac{5}{6}$; 5) 49; 6) 24; 7) 0,4; 8) 0. 2.68. 6) $-19y + 18$. 2.70. $mx +$
 $+ n(x + y)$ тг. 2.72. $AB - CD = 0$. 2.74. 1) $-0,1$; 2) $-\frac{2}{13}$; 3) $-3\frac{3}{7}$; 4) -39 . 2.80. 16,5 км/сағ.
 2.81. 600 т және 800 т. 2.83. 32 үлкен және 48 кішкентай лампы. 2.84. 1 (4;7);
 2) $(-3; -15)$. 2.85. 1) $-3a^{18}y^9$; 2) $-\frac{0,9x}{y^2}$. 2.86. 417. 2.89. 7) $10b^2 - 18bc + 8c^2$. 2.90. 5) $4x^2 +$
 $+ 2xy - 2x - y$; 8) $-30m^2 + 27m - 6$. 2.91. 3) $4n^4 + 19n^2 - 5$. 2.92. 6) $2x^4 + 9x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 12y^4$.
 2.93. 1) $2x^2 - 12$; 2) $2a^2 - 4$; 3) $2a^2 + 10a + 14$; 4) $2x^2 - 10x + 14$. 2.94. 4) $20x^3y^2 - 13x^2y^3 -$
 $- 20xy^4 - 6x^5 + 7x^4y$. 2.95. 1) 4; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 0. 2.97. 2) $x^6 - 1$; 4) $x^5 - y^5$. 2.99. 8,
 9, 10, 11. 2.101. 3) $x(2 - y)$. 2.102. 7) $-mn(mn + 1)$; 8) $9q^3(2p - q)$. 2.104. 5) $6pq(5q^2 +$
 $+ 3pq - 2p^2)$. 2.105. 1) $a(a^2 + 5a + 1)$. 2.106. 4) $-3m^2(2b - 3m + 4m^2 + b^2)$. 2.107. 1) 0; 5;
 2) 0; -6 ; 3) 0; $-0,1$; 4) 0; $-2,5$; 5) 0; 1,5; 6) 0; $\frac{1}{12}$; 7) 0; 35; 8) 0; -4 . 2.108. 1) 4,27;
 2) -15 ; 3) 16,9; 4) 128. 2.109. 1) $2ab(2a^2 - 5ab + b^2)$; 6) $3ax^3(2a^3 - 5a^2x + 5ax^2 - 3x^3)$.
 2.110. 5) $(x - 2y)(9a^2 - b^2 + x - 2y)$. 2.111. 3) $5xy(x^2 - x + 1)(y - 3x)$. 2.112. 7) $125x^3(1 -$
 $- 3x)^3$; 8) $32x^5(y + 3x)^5$. 2.119. 2) $(x - y)(3b + 1)$; 6) $(m - n)(4a - 1)$. 2.120. 9) $(x - y)(3 + a)$.
 2.121. 6) $(2y - 5x)(3b - 2a)$; 9) $(5a - 6b)(x - y)$. 2.123. 1) 1,5; 2) 24; 3) 6; 4) 11,5.
 2.124. 4) $(a + b + c)(x - 1)x$; 2.125. 1) $(c^2 - d)(a + c - b)$; 2) $(m - n)(x^2 + y^2 - 1)$; 5) $(ab + 1) \times$
 $\times (a + b + 2)$; 6) $(x - y^2)(x - y + 1)$. 2.126. 1) 11,2; 2) $-\frac{5}{8}$; 3) 91. 2.131. 1) $(x + 2)(x + 3)$;
 4) $(x - 3)(x - 4)$; 6) $(x + 1)(x - 4)$; 8) $(x - 3)(x + 5)$. 2.132. 5 м және 15 м. 2.133. 1) -1 ;

5; 2) -3; -4; 3) 1; 10. 2.136. 246. 2.137. $m=2$. 2.138. 14 қоян және 22 қырғауыл.
2.139. 1) 0; 2) 0. 2.140. 35 км.

3. Функция

3.6. 4) $f(-1) = \frac{3}{4}$; $f(0) = \frac{3}{5}$; $f(1) = \frac{1}{2}$; $f(2) = \frac{3}{7}$. 3.13. 2) $x = 4\frac{1}{3}$. 3.15. 1) $(-\infty;$
5) $\cup(5; \infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$. 3.16. 1) $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$. 3.17. 1) $[-2; -1) \cup (-1; 7]$
3.18*. 1) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 2) $x = \frac{2}{y-4} + 3$; 3) $y \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ – мәндері об-
лысы. 3.27. 1) Функция; 2) функция емес; 3) функция емес; 4) функция.
3.29. 1) $\varphi(4)=10$, $\varphi(1)=6$; 2) $r(2)=12$; $r(1)=5$. 3.56. 16 кг. 3.57. 3) $y=3x$. 3.60.
Нұсқау: $M_1(x_1, y_1)$ нүктесі арқылы өтетін түзу теңдеуі $y-y_1=k(x-x_1)$ түрінде,
ал M_1 және M_2 нүктелері арқылы өтетін түзудің бұрыштық коэффициенті
 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ түрінде жазылатынын көрсетсеңдер, онда бізге қажет M_1M_2 түзуінің
теңдеуі $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ түрінде жазылады. 3.63. $n=4$. 3.64. $-3\frac{4}{45}$. 3.67. 1) $y=3x-4$
болғандықтан, $k=3$, онда екінші параллель түзуге де бұрыштық коэффи-
циент болады. 3.68. 1) $y=3x-4$ үшін $k=3$, ал оған перпендикуляр түзу үшін
 $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{3}$, яғни $y = -\frac{1}{3}x + 4$ – перпендикуляр түзудің теңдеуі. 3.79. $y=x+0,5$;
 $-1 \leq x \leq 1$. 3.81. 1) -12; 2) -45. 3.82. 3) $m^{10} = \left(\frac{1}{m^2}\right)^{-5}$. 3.85. 5) $y = -\frac{1}{2}x - 1$.
3.86. 3) $x-3y=-12$; 4) $2x-y=0$. 3.99. 1) Бар; (1; -2); 2) Шешімі жоқ: $\emptyset$.
3.104. 1) $m=9$; 2) $m = \pm 5$. 3.105. 1) $m=-27$; 2) $m=2$. 3.106. A, B және D жатады,
ал C жатпайды. 3.112. 1) $0,5^2 > 0,5^3$; 2) $1,5^2 < 1,5^3$. 3.117. 1) 27; 2) -18; 3) $-2\frac{1}{4}$; 4) $1\frac{4}{5}$.
3.118. 1) 16; 2) -8; 3) $-2\frac{2}{3}$; 4) 1. 3.119. 1) 0,5; 2) -0,5; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) 6;
6) 3. 3.120. 1) $\frac{1}{4}$; 3) 3; 4) 2. 3.122. 1) a^3, a^2, a ; 2) a, a^2, a^3 ; 3) a, a^3, a^2 ; 4)
 a^3, a, a^2 . 3.124. 1) (0; 0) және (-1; 2) екі қиылысу нүктесі бар; 2) (0; 0) және
 $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$. 3.127. Үш қиылысу нүктесі бар, координаталары: (0; 0); $\left(\pm \frac{a}{b}; \pm \frac{a^3}{b}\right)$.
3.128. (0; 0), $(\pm 2; \pm 4)$. 3.130. 7. 3.131. 20 га, 30 га, 15 га. 3.132. $k=3$, B нүктесі
арқылы өтпейді. 3.133. 1) $-2,8a^{11} \cdot b^5$; 2) $-\frac{11}{4}a^2$. 3.134. 180 кірпіш. 3.135. 1) $(0,7)^{20} =$
 $= (-0,7)^{20}$; 2) $-6,4^4 < (-6,4)^4$. 3.136. 210 км; $303\frac{1}{3}$ км. 3.147. 2) $m=2$, $n=-2$.

3.148. 1) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{5}{x}$; 3.149. $b = \frac{6}{a}$. 3.150. 1) 100 км/сағ; 2) 62,5 км/сағ;
3) 50 км/сағ. 3.151. 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{15}$.

4. Статистика элементтері

4.9. $m=2$, $n=10$. 4.10. $p=0,4$; $x_4=4$. 4.12. $y=2$. 4.16*. $x_1=1$; $x_2=2$. 4.17*. $x_1=-13,8$;
 $x_2=6,7$. 4.36. 27. 4.37. 222.

5. Қысқаша көбейту формулалары

5.3. 6) $5\frac{4}{9}m^2 + 7mn + 2\frac{1}{4}n^2$. 5.4. 7) $1\frac{7}{9}x^2 + 16x + 36$. 5.5. 1) 10201; 2) 961; 3) 2601;
4) 1521. 5.6. 4) $(c-5)^2$; 6) $(4-c)^2$. 5.7. 1) $(3a-4b)^2$; 4) $(9x-y)^2$; 6) $(10a+b)^2$. 5.8. 3) $(7a+2b)^2$;
6) $(4a+b)^2$. 5.9. 2) $2mn$; 5) c^2 ; 6) $6k$. 5.11. 6) $\frac{25}{36}p^2 - pq + \frac{9}{25}q^2$. 5.12. 3) $0,04m^4 - 2m^2n +$
 $+ 25n^2$. 5.13. 5) $c^{2k+2} + 2c^{2k+1} + c^{2k}$. 5.14. 3) $\left(\frac{5}{6}m - \frac{3}{5}n\right)^2$; 6) $\left(b^4 - \frac{a^2}{2}\right)^2$. 5.15. 1) Болмай-
ды; 2) $(3m-10n)^2$; 3) $(2a-b)^2$; 4) болмайды; 5) $(3x^4-2y)^2$; 6) $(ab^2-x^4)^2$. 5.19. 1) $3a^2$;
2) $0,4n^3$; 3) $15x^2y$; 4) $4a^{12}$. 5.20. 1) 4; 2) $\frac{5}{12}$; 3) 1,2; 4) $5\frac{2}{3}$. 5.21. 1) $3\frac{1}{8}$; 2) 0; 3) -1,6;
4) $2\frac{4}{21}$. 5.22. 1) $4ab$; 2) $12-3m^2$; 3) $112-52y+7y^2$; 4) $290-150x+80x^2$; 5) $9-4a-a^2$;
6) $-9x^2-10x+3$; 5.23. 1) $16a^3b-16ab^3$; 2) x^2+1 . 5.24. $4ab$. 5.27. 4) $27x^3+54x^2b+$
 $+ 36xb^2 + 8b^3$. 5.28. $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (a-b)^2]$. 5.29. $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$.
5.33. 1) $(x+1)(x+2)(x+3)$; 2) $(a+1) \cdot (a^2+a+1)(a^2-a+1)$. 5.34. 2) a^2-9b^2 .
5.35. 80 км/сағ және 90 км/сағ. 5.36. 2) $(7a^3)^2$; 4) $(0,2a^3b^3)^2$. 5.37. 11) $81b^2-64a^2$.
5.38. 5) $25a^2-64b^2$. 5.39. 3) y^2-x^2 ; 6) $a^2+2ab+b^2$. 5.40. 7) $(10-p)(10+p)$.
5.41. 7) $(ab-c)(ab+c)$; 8) $(pq-2k)(pq+2k)$. 5.42. 2) 3599; 4) 4896; 6) 720;
8) 840. 5.43. 1) ± 3 ; 3) ± 9 ; 5) $\pm \frac{5}{4}$. 5.44. 1) 224,96; 2) 399,99; 3) 15,9999;
4) 899,96; 5) 7200; 6) 78000; 7) 6; 8) 47. 5.45. 5) $36y^2-25x^2$. 5.46. 2) $(3x-4y) \times$
 $\times (3x+4y)$; 6) $(2ab-1)(2ab+1)$. 5.48. 6) $0,04t^2-0,25u^2$. 5.49. 6) $1,69a^2b^2-1,21c^2$.
5.50. 5) $4y^6-25x^4$. 5.51. 3) $p^{2m}-q^{2n}$; 5) $625-x^4$; 6) a^4-8a^2+16 . 5.52. 1) $4(a-1) \times$
 $\times (a+6)$; 2) $5(x-y)(5x+y)$; 3) $-(2p+1)(4p+1)$; 4) $(a+3b) \times (3a-b)$; 5) $4xy$; 6) $4(p-2q) \times$

$\times(3p+q)$. 5.53. 3) $(5ab-4x^2)(5ab+4x^2)$. 5.54. 8) $\left(\frac{2ax^2}{5}-\frac{3y^2}{4}\right)\left(\frac{2ax^2}{5}+\frac{3y^2}{4}\right)$. 5.55.
 2) $(4-x-y)(4+x+y)$; 5) $-12(4a+3)$. 5.56. 6) $-(m+n)(15m+n)$. 5.57. 1) 3,99;
 2) 15,9996; 3) 399,96; 4) 0,9975; 5) 8; 6) 16; 8) 4,25. 5.58. 1) $\frac{3}{2}$; 3) 14; 4) 5.
 5.59. 1) $(a+3b)(3a-b)$; 2) $(x+z)(x+2y-z)$; 3) $4pq$; 4) $4(a-2b)(3a+b)$. 5.64. 1) $(a-b) \times$
 $\times(a+b-2,5)$; 2) $(m+n)(m-n+1,5)$; 3) $(x+y)(x-y+5)$; 4) $(2c-b)(2c+b-1)$. 5.65. 1)
 $a^{15}(4a-1)(4a+1)$; 2) $m^{18}\left(m-\frac{4}{7}\right)\left(m+\frac{4}{7}\right)$; 3) $x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$. 5.66. 1) $(a+b-1) \times$
 $\times(a+b+1)$; 2) $(2-5m+n)(2+5m-n)$; 3) $(9x-3a+b)(9x+3a-b)$; 4) $(xy-1-x-y)(xy-1+x+y)$.
 5.67. 1) 6; 2) ± 2 ; -3; 3) ± 3 ; 0,5; 4) ± 1 ; $\frac{3}{4}$; 5) ± 4 ; $\frac{1}{2}$; 6) 1,5. 5.69. 38 см. 5.70. 2) $(3a^2)^3$;
 3) $(2m^3)^3$; 5) $(-2a^3b^2)^3$. 5.71. 1) $(2ab+1)^2$; 2) $\left(1-\frac{xy}{2}\right)^2$. 5.74. 12 км. 5.75. 10) $(n-3)(n^2+3n+9)$.
 5.76. 8) $\left(\frac{m}{4}+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{m^2}{16}-\frac{mn}{20}+\frac{n^2}{25}\right)$. 5.77. 5) $-\left(\frac{b}{3}+1\right)\left(\frac{b^2}{9}-\frac{b}{3}+1\right)$. 5.78. 1) a^3-8 ; 2) x^3+8y^3 ;
 3) $64+b^3$; 4) $27a^3-8b^3$. 5.79. 1) 1; 3) m^3 ; 4) c^3 . 5.80. 5) $\left(\frac{n}{4}+2\right)\left(\frac{n^2}{16}-\frac{n}{2}+4\right)$. 5.81. 4) $(xy-1) \times$
 $\times(x^2y^2+xy+1)$. 5.82. 5) $27a^3-8b^3$; 6) $1+c^3$. 5.83. 6) $(m-n)(m^2+mn+n^2)(m^6+m^3n^3+n^6)$.
 5.88. 1) a^3b^3-64 ; 4) $\frac{x^3}{64}+\frac{y^3}{125}$. 5.89. 6) $(4xy^2+7a)(16x^2y^4-28axy^2+49a^2)$. 5.90.
 1) $2b(3a^2+b^2)$; 2) $(3x-y)(3x^2+3xy+7y^2)$; 3) $2mn(4m^2n^2-6mn+3)$; 4) $9a(3a^2-$
 $-6ab+4b^2)$. 5.91. 1) $(a+b)(a^2-3ab+b^2)$; 2) $-(5m+n)(m^2+mn+n^2)$; 3) $(x-y)(x^2+9xy+y^2)$;
 4) $(p^2-pq+q^2)(p+q-2pq)$. 5.92. 1) $(2a+1)(4a^2+a+1)$; 2) $(x-5)(x^2+x+25)$; 3) $(m-n) \times$
 $\times(m+n)(m^2-mn+n^2)$; 4) $(c+y)(c-y)(c^2+cy+y^2)$. 5.93. 1) $27x^3-1$; 4) $343b^6+8$.
 5.94. 1) $a(a^2-6ab+12b^2)$. 5.98. 1) -0,2; 2) 19,75. 5.102. 1) $(a-2b-3c)(a-2b+3c)$.
 5.103. 9) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$. 5.104. 7) $0,001m^3-0,12m^2n+4,8mn^2-64n^3$. 5.105. 5) $(0,2+$
 $+a)^3$; 6) $\left(\frac{m}{3}-3n\right)^3$. 5.106. 3) $\left(\frac{u}{2}+2v\right)^3$; 4) $(0,1a-10b)^3$. 5.107. 5) $\frac{8}{27}a^3-4a^2b+18ab^2-$
 $-27b^3$. 5.108. 6) $0,008x^3+0,06x^2y+0,15xy^2+0,125y^3$. 5.109. 1) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^3$; 4) $(0,3x+4y)^3$.
 5.110. 4) $343p^9+1323p^6q^4+1701p^3q^8+729q^{12}$. 5.111. 8) $1000x^9+900x^6y^2+270x^3y^4+$
 $+27y^6$. 5.113. 6) $3,375m^3+2,025m^{10}+0,405m^{11}+0,027m^{12}$. 5.114. 3) $xy(5x-3y)^3$.
 5.115. 5) $(c-2y)^2(1+c-2y)$. 5.116. 1) 0; -2; 2) 0; $\frac{1}{3}$. 5.117. 1) 4; 2) 13; 3) -30. 5.118. 1) $3b$;
 2) $3x$. 5.122. 1) 5; 2) 2; 3) 3. 5.126. 1) $(x^2+xy+y^2)(6x-y)$; 2) $(a-b)(a^2-4ab+b^2)$.

5.127. $n=2$; $k=38$. 5.128. 1) $(x+y+z) \cdot (x+y-z+1)$; 2) $(a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2-ab+b^2)$.
 5.129. 4 сар. 5.130. 7) $5(x-2y)(x+2y)$. 5.131. 4) $(a-b)(x+1)$; 7) $(x+y)(3m-1)$;
 8) $(x-y)(2a-1)$. 5.132. 2) $a^2b^2(a-b)(a+b)$; 5) $c^3d^2(1-c)$. 5.133. 1) $(a-b)(x-y)$; 4) $(x-y) \times$
 $\times (2n+1)$. 5.134. 1) $2(x+y)^2$; 2) $6(x-y)^2$; 6) $3a(1-b)^2$. 5.135. 1) $(a-b)(a+b-1)$; 2) $(a+b) \times$
 $\times (a-b+1)$; 3) $(x-y)^2(x+y)$; 6) $(x-y)(c-x+y)$. 5.136. 1) $(a-b)^2(a-b-3)$; 4) $(x-2y)^2(1-x+2y)$.
 5.140. 5) $(x^2y-a^2+b^2) \times (x^2y+a^2-b^2)$; 6) $(3xy^2-a+b)(3xy^2+a-b)$. 5.141. 3) $(m-2n-$
 $-2p+3q)(m-2n+2p-3q)$; 8) $(3a-3b-2x+2y)(3a-3b+2x-2y)$. 5.142. 2) $(a-b)(a+b) \times$
 $\times (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$; 4) $(a+1)^2 \cdot (a^2-a+1)$. 5.143. 2) $x(x-1)(a+b+c)$. 5.144. 3) $-4b \times$
 $\times (3a^2+4b^2)$; 4) $(5x+y) \cdot (7x^2-5xy+19y^2)$. 5.145. 1) $(m-n)^2-(m+n)$; 6) $(b-2)(b^2+8b+4)$.
 5.146. 2) $(x+2) \cdot (x+4)$; 4) $(a-2b) \times (a-5b)$. 5.147. 1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$;
 4) $(x-1)(x+2)^2$. 5.148. 1) $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$; 2) $(x^2+5)(x^2+x+1)$. 5.152. 1) $a=-1$;
 2) $a=1$. 5.153. 1) $b=20$; 2) $b=1$. 5.154. 1) $12(a-b)^2(a+b)$; 2) $24(x+y)^2(x-y)$. 5.188. 1) $(a+$
 $+2b)2(1-a-2b)$; 2) $(4u+v)(8u-v)$. 5.189. 27; ...; $\frac{1}{27}; \frac{1}{81}$. 5.190. 1) Арифметикалық
 орта мәні 9,75-ке тең; құлашы 4-ке тең; модасы 8-ге тең; медианасы 10-ға тең.

6. Рационал өрнектер

6.1. 8) $\frac{3a}{2m-5n}$. 6.2. 1) 3; 2) -3; 3) 3; 4) -0,1; 5) $\frac{2}{3}$; 6) 0; 4; 7) ± 3 ; 8) -1; -5.
 6.3. 1) 2; 2) -1; 3) 3; 4) 2; 5) 1; 6) 3; 7) a ; 8) $-b$; 9) ± 1 ; 10) -1; 2. 6.7. 5) $2m$;
 8) $\frac{x}{2y^2}$. 6.1) $\frac{a+4b}{2ab}$; 7) $\frac{y-4}{3}$; 12) a^2+ab+b^2 . 6.9. 1) 100; 2) $\frac{3}{4}$. 6.10. 1) $\frac{a+b}{3a}$;
 5) $y-z$; 6) 2. 6.11. 3) $\frac{3m}{4n}$; 4) $-\frac{a}{b}$; 6) $\frac{5ab}{8cb}$. 6.13. 4) $\frac{m-n}{m+n}$. 6.14. 3) $\frac{x+1}{x-1}$. 6.15. 2) $\frac{x-1}{x+1}$.
 6.16. 2) $\frac{m^2+mn+n^2}{m+n}$. 6.17. 4) $\frac{1}{a-b}$. 6.18. 1) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. 6.19. 4) a^2+b^2 . 6.20. 4) $a^2(a-1)$.
 6.22. 1) 4,5; 2) $\frac{9}{35}$. 6.23. 1) $x=a+2$, $a \neq 2$; 2) $x=5$, $c \neq d$; 3) $x=b$, $c \neq a$, $b \neq 0$;
 4) $x=a+b$; $a \neq b$. 6.24. 4) $a+b-c$. 6.25. 2) $\frac{1}{a+1}$; 4) $\frac{x-a}{x^2+a}$. 6.26. 1) -1,4; 2) 9. 6.28. 3) $x=a+1$,
 $a \neq -1$. Егер $a=-1$ болса, онда $x \in (-\infty; +\infty)$. 6.29. 3) $\frac{m+1}{m+7}$. 6.30. 3) $\frac{m}{m+n}$. 6.31. 2) $\frac{2n}{a}$;
 6) $\frac{4a+4}{b}$. 6.32. 4) $\frac{a-2}{a+b}$. 6.35. 2) $\frac{3x}{a-b}$. 6.36. 4) $\frac{x+4}{a-b}$. 6.37. 1) $\frac{y+2x}{4xy}$. 6.38. 1) $\frac{x(c+b)}{abc}$;
 3) $\frac{2bm+3an}{abx}$. 6.39. 2) $\frac{2a^2-b^2+2ab}{ab}$. 6.40. 3) $\frac{n+2m}{m^4n^4}$. 6.41. 1) $1+\frac{3}{a}$; 2) $1+\frac{x}{c^2}$; 3) $m-2+\frac{4}{m}$.

6.42. 2) 3, 9; 3) 1, 3. 6.43. 1) $\frac{3ax-2b}{6x^2}$. 6.44. 4) $\frac{y(x+3y)}{6}$. 6.45. 4) $\frac{a}{b}$; 8) $\frac{5a-1}{6}$. 6.46. 1) 12;
 2) 10; 3) 4; 4) 10; 5) 24; 6) 6. 6.47. 1) 100; 2) 10. 6.48. 2) $\frac{5a-b}{a(a-b)}$. 6.49. 1) $-\frac{2(b+3)}{b(b+2)}$.
 3) $\frac{9a-4}{4(a+2)}$; 5) $-\frac{7x}{10(x-3)}$. 6.50. 2) $\frac{6m}{9m^2-n^2}$. 6.51. 3) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) 0. 6.52. 3) $\frac{a(2b+1)}{1-b^2}$;
 4) $\frac{2}{a+2}$. 6.53. 2) $\frac{a+1}{5(a-4)^2}$. 6.54. 1) $\frac{2}{x}$; 2) -2; 3) $\frac{12a}{1-a^3}$; 4) $-\frac{1}{a}$. 6.55. 1) $\frac{1}{3x-2y}$;
 4) $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$. 6.56*. 1) 0; 2) $\frac{2}{y-z}$. 6.57*. 1) $\frac{1}{abc}$; 2) 1. 6.59. 1) 6; 2) 4; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 1, 4. 6.60.
 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 1. 6.62. 9. 6.64. 1) $(a-b-c)(a-b+c)$; 2) $(a-b-4)(a-b+4)$. 6.65. $x=-1$.
 6.66. 6) cx ; 7) $\frac{n}{m}$. 6.67. 5) $\frac{x}{y}$; 8) $\frac{15c^2}{4a}$. 6.72. 1) $-6x^3y$; 5) $ab-b^2$. 6.73. 2) 1; 3) $\frac{a+2b}{3}$;
 5) $x-y$. 6.76. 1) $\frac{9b}{5ay}$; 3) $\frac{128a^2}{9}$. 6.77. 1) m^3 ; 2) $-n(n+1)$; 4) $-x^2(x^2+3)$. 6.78. 1) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$;
 2) 1; 3) $\left(\frac{x-b}{x+b}\right)^2$; 4) 1. 6.79. 3) 1; 4) -1. 6.82. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{25(x^2-y^2)}{8}$. 6.83. 3) x ; 4) $-\frac{x}{a}$.
 6.84. 1) $\frac{1}{a}$; 3) $\frac{x-a}{y-a}$. 6.85. 1) $n+1+\frac{1}{n}$; 2) $\frac{2ac(a+c)^6+c}{2(n+a+1)}$. 6.86. 1) $b+a$; 2) 1. 6.88. $x^8-16=(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. 6.89. 1) -6; 2) 2, 3. 6.92. 30 км. 6.93. 4) $x+y$.
 6.94. 2) $\frac{a^3}{m^4}$; 4) 0. 6.95. 3) $-a$; 4) x . 6.96. 1) $6\frac{2}{3}$; 3) $3-x^2$; 4) -1. 6.97. 1) $\frac{a+b}{b-a}$; 4) $\frac{2}{x+y}$.
 6.98. 3) $-\frac{c}{a}$. 6.99. 1) $2x(x+y)$; 2) $\frac{3x+2y}{2xy}$. 6.100. 2) $\frac{x-1}{x(x+1)}$. 6.101. 2) 1.
 6.102. 1) $\frac{3}{1-x}$; 2) $\frac{1}{a^2+1}$. 6.103. 2) $\frac{6}{x-a}$. 6.104. 2) -1. 6.107. 1) ab ; 2) $\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$.
 6.108. 1) 0; 2) $\frac{2}{b}$. 6.110. 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) $\frac{a}{b}$. 6.111. 1) $\frac{x-z}{y-z}$. 6.114. 1) 1, 5; 2) 2.

7. 7-сынып материалын қайталауға арналған жаттығулар

7.1. 1) $\frac{x}{15}$; 2) $\frac{32a}{75}$; 3) $\frac{m-n}{a-1}$. 7.2. 1) $\frac{y}{4}$; 2) $\frac{5x}{14a}$; 3) $\frac{y}{3}$; 4) $\frac{3b}{50ac}$. 7.5. 3) $\frac{m^3}{8}-8n^3$.
 7.6. 1) 216; 2) $-12\frac{1}{4}$. 7.7. 4) $\frac{3a}{7b}$. 7.8. 1) 3; 2) 1. 7.9. 2) $\frac{a-b}{a+b}$; 3) $5-x$. 7.10. 2) $\frac{1}{5}x^6y^2 \cdot a^3b^9$.

7.11. 3) $\frac{2x^2 + 2xy - y^2}{xy}$. 7.12. 1) $\frac{30abx + 4by - 3}{6a^2b^2}$. 7.13. 1) $\frac{16a^4}{9}$. 7.14. 1) $1 - x^4$; 2) $2x^2 + 3$.
 7.15. 1) $x + 2$; 2) $a^2 - 3ab + 9b^2$. 7.16. 1) $x^2 - y^2$; 2) $3a^2 - 1,4a - 0,91$. 7.17. 3) a^{n+4} . 7.19. 1) $y = 0,41x$.
 7.20. 1) $\frac{1-m}{1-2m}$; 2) $\frac{10}{2x+1}$. 7.21. 1) $y - 1$; 2) $x + y$. 7.23. 1) Если $a > 1$, тогда $a^2 > \frac{1}{a^2}$; если
 $0 < a < 1$, тогда $a^2 < \frac{1}{a^2}$. 7.24. 2) $\frac{2}{5x^2(a-b)}$. 7.25. 3) $\frac{2}{5a(a+2b)}$. 7.26. 1) 1,125; 2) 4,5. 7.27. 3) 9.
 7.30. 1) 14; 2) 90. 7.32. 0 немесе 1. 7.33. 1) 0; 2) 9. 7.34. 1) $\frac{x+c}{2x+y}$; 2) $\frac{x+z}{(1-y)^2}$; 3) $\frac{1}{3a^2 - b^2}$.
 7.35. 1) $-\frac{1}{c}$. 7.36. 1) $\frac{m^2 - 3m}{m^2 + 2m - 8}$; 2) $\frac{a^2 - 8a + 7}{a^2 + 9a + 20}$. 7.37. 1) 1; 3) $\frac{a^2}{a^3 - a + 1}$. 7.40. 1) 2^{496} ;
 2) 5^{561} ; 3) $7^{n^2 + n}$. 7.41. 2) 10. 7.43. 1) 24; 2) 2^{97} . 7.45. 1) $5^{300} = (5^3)^{100} = (125)^{100} < (243)^{100} = 3^{500}$.
 7.46. $5 \cdot 10^{2002}$. 7.47. 1) 9; 2) 7; 3) 8. 7.48. 9. 7.49. 0; 7.50. 0. 7.51. Мүмкін емес.
 7.52. Мүмкін емес.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз	3
V–VI сынып материалын қайталау	4
1. НАТУРАЛ ЖӘНЕ БҮТІН КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕ	10
1.1. Натурал көрсеткішті дәреже	10
1.1.1. Натурал көрсеткішті дәреже ұғымы.	10
1.1.2. Дәрежелерді көбейту және бөлу. Санның көрсеткіші нөлге тең дәрежесі	15
1.1.3. Көбейтіндіні, бөлшекті және дәрежені дәрежеге шығару	22
1.2. Бүтін көрсеткішті дәреже	27
1.2.1. Бүтін теріс көрсеткішті дәреже ұғымы.	27
1.2.2. Бүтін көрсеткішті дәреженің қасиеттері.	28
1.3. Бүтін көрсеткішті дәрежені қолдану	32
1.3.1. Құрамында дәрежесі бар сандар тізбегі	32
1.3.2. Санның стандарт түрі.	34
1.3.3. Стандарт түрде берілген сандарды қосу және азайту	39
1.3.4. Абсолюттік және салыстырмалы қателіктер	39
«Натурал және бүтін көрсеткішті дәреже» бөлімі бойынша тест тапсырмалары	45
2. БІРМҮШЕЛЕР МЕН КӨПМҮШЕЛЕР	46
2.1. Бірмүшелер	46
2.1.1. Бірмүше және оның стандарт түрі.	46
2.1.2. Бірмүшелерді көбейту. Бірмүшелерді дәрежеге шығару.	46
2.2. Көпмүшелер.	50
2.2.1. Көпмүше және оның стандарт түрі	50
2.2.2. Көпмүшелерді қосу және азайту	51
2.3. Бірмүше мен көпмүшенің көбейтіндісі	56
2.3.1. Бірмүшені көпмүшеге көбейту	56
2.4. Көпмүшелерді көбейту	61
2.4.1. Көпмүшені көпмүшеге көбейту	61
2.5. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеу тәсілдері	64
2.5.1. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару.	64
2.5.2. Көпмүшені топтау тәсілімен көбейткіштерге жіктеу	68
«Бірмүшелер мен көпмүшелер» бөлімі бойынша тест тапсырмалары	73
3. ФУНКЦИЯ.	74
3.1. Функция және оның берілу тәсілдері	74
3.1.1. Функция ұғымы	74
3.1.2. Функцияның кестелік және графиктік тәсілдермен берілуі	80
3.2. Сызықтық функция және оның графигі	86
3.2.1. $y = kx$ функциясы және оның графигі	86
3.2.2. $y = kx + b$ түріндегі функция және оның графигі	87

3.2.3. Жазықтықта түзулердің өзара орналасуы	93
3.2.4. Жазықтықта түзулердің координаталар өсіне қатысты орналасуы	95
3.3. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешу	99
3.3.1. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің графигі	99
3.3.2. Сызықтық теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешу	100
3.4. $y = ax^2$, $y = ax^3$ функциялары және олардың графигі	105
3.4.1. $y = ax^2$ функциясы және оның графигі	105
3.4.2. $y = ax^3$ функциясы және оның графигі	107
3.5. $y = \frac{k}{x}$ функциясы және оның графигі	113
«Функция» бөлімі бойынша тест тапсырмалары	120
4. СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ	122
4.1. Бас жиынтық және таңдама	122
4.2. Жиіліктер мен салыстырмалы жиіліктер алқабы	128
«Статистика элементтері» бөлімі бойынша тест тапсырмалары	136
5. ҚЫСҚАША КӨБЕЙТУ ФОРМУЛАЛАРЫ	138
5.1. Екі өрнектің қосындысының квадраты және айырмасының квадраты	138
5.1.1. Екі өрнектің қосындысының квадраты	138
5.1.2. Екі өрнектің айырмасының квадраты	138
5.2. Екі өрнектің квадраттарының айырмасы	144
5.2.1. Екі өрнектің айырмасы мен қосындысының көбейтіндісі	144
5.2.2. Екі өрнектің квадраттарының айырмасын көбейткіштерге жіктеу	144
5.3. Екі өрнектің кубтарының қосындысы мен айырмасы	149
5.3.1. Екі өрнектің кубтарының қосындысын көбейткіштерге жіктеу	149
5.3.2. Екі өрнектің кубтарының айырмасын көбейткіштерге жіктеу	150
5.4. Екі өрнектің қосындысының кубы және айырмасының кубы	153
5.4.1. Екі өрнектің қосындысының кубы	153
5.4.2. Екі өрнектің айырмасының кубы	154
5.5. Бүтін өрнектерді түрлендіру	158
5.5.1. Бүтін өрнекті көпмүшеге түрлендіру	158
5.5.2. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеудің әртүрлі тәсілін қолдану	158
5.6. Мәтінді есептерді математикалық модель құрып шығару	162
«Қысқаша көбейту формулалары» бөлімі бойынша тест тапсырмалары	169
6. РАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕР	170
6.1. Рационал өрнектерді түрлендіру	170
6.1.1. Рационал өрнектер	170
6.1.2. Бөлшектерді қысқарту	171
6.2. Рационал өрнектердің қосындысы мен айырмасы	178
6.2.1. Бөлімдері бірдей бөлшектердің қосындысы мен айырмасы	178
6.2.2. Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді қосу және азайту	179

6.3. Рационал өрнектерді көбейту және бөлу	186
6.3.1. Бөлшектерді көбейту	186
6.3.2. Бөлшектерді бөлу	187
6.3.3. Рационал өрнектерді теңбе-тең түрлендіру	192
«Рационал өрнектер» бөлімі бойынша тест тапсырмалары	196
7. 7-сынып материалын қайталауға арналған жаттығулар	198
Терминдер атауының сөздігі	203
Глоссарий	206
7-сынып материалындағы кейбір есептердің шығарылуы мен жауаптары (QR)	210
Оқушылардың функционалдық сауаттылығын арттыруға арналған қосымша тапсырмалар (QR).	211
Қорытынды тест тапсырмалары (QR)	211
ЖАУАПТАРЫ	212



Оқу басылымы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Бектасова Алмагүл Ибраимқызы

АЛГЕБРА

Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық

Редакторы *Л. Бултекова*
Көркемдеуші редакторлары *А. Имантай, А. Садуақасова*
Техникалық редакторлары *Ү. Рысалиева, М. Алтай*
Корректорлары *А. Іздік, А. Сейткен*
Компьютерде беттеген *Е. Оғурцова*

ИБ № 076

Теруге 18.11.2024 жіберілді. Басуға 28.05.2025 қол қойылды. Пішімі 70х90^{1/16}.
Офсеттік қағаз. Офсеттік басылыс. Шартты баспа табығы 16,38.
Есептік баспа табағы 8,72. Таралымы 40000 дана. Тапсырыс №8988.
«Атамұра» корпорациясы «ЖШС, 050000, Алматы қаласы Абылай хан даңғылы, 75
Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 0500002, Алматы қаласы, М. Макатаев көшесі, 41.

